Automatique
–
Commande des Systèmes Linéaires Continus

◇ M1 ◇

U.E. CSy – module P2

Christophe Calmettes
christophe.calmettes@univ-jfc.fr

Année 2019–2020

Introduction

Dans le cadre du fonctionnement d'une unité de production industrielle, les performances sont jugées selon des critères :

- de qualité du produit,
- de sécurité et de sûreté de fonctionnement,
- d'économies des matières premières et d'énergie,
- de respect de l'environnement (qualité des rejets, ...),
- ...

L'**automatique** apporte des solutions pratiques pour remplir au mieux l'ensemble de ces critères (satisfaction du cahier des charges). La mise en œuvre de ces solutions consiste à **conduire** – ou **piloter** – le procédé.
La conduite des procédés recouvre des activités telles que la planification, l'ordonnancement, la surveillance, la supervision et la **commande**.

Ce cours apporte les outils nécessaires à la commande **analogique** (signaux à Temps Continu) appliquée à des procédés (ou processus) supposés **linéaires** (ou linéarisés).

Le principe général de la commande des procédés est connu sous le terme de commande en **boucle fermée** ou commande par **rétroaction** (*feedback control*).

L'articulation cours / travaux dirigés / travaux pratiques de la partie *Commande des Systèmes Linéaires Continus* des enseignements d'Automatique proposée s'inspire largement du travail et des supports d'Omer Mercier. Je l'en remercie cordialement.

Système commandé (piloté)

Le terme **commande** désigne toute action exercée sur un système pour influencer son évolution dynamique.

Un système **commandé** ou **piloté** est constitué de deux sous-systèmes (parties) en interaction (figure 1) :

- le système commandé lui-même (partie opérative) qui effectue les tâches physiques – les signaux mis en jeu dans cette partie sont de nature physique ;
- le système de commande ou système de pilotage (partie commande) qui transmet des ordres (des commandes) au système commandé, ordres élaborés sur la base d'objectifs à atteindre (comportement du système, dynamique, ...) – les signaux mis en jeu

ici sont de nature informationnelle.

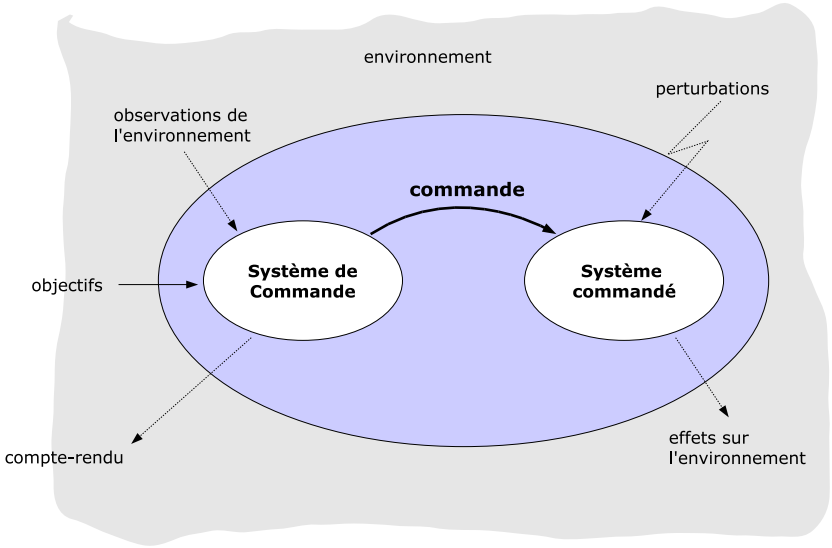


FIGURE 1 – Système commandé (piloté)

Lorsque le système de commande n'a pas d'information sur l'évolution et le comportement du système commandé, on parle de **Commande en Boucle Ouverte** (cas de la figure 1). Dans ce cas, il n'est pas possible, pour le système de commande, de savoir si l'effet des ordres qu'il a émis a permis de faire évoluer conformément aux objectifs visés et dans son environnement (perturbations, ...) le système commandé.
Pour que le système de pilotage puisse *adapter* la commande dans le cas d'une évolution non conforme, il faut commander le système en **Boucle Fermée**.

Commande en boucle fermée – *feedback*

Le rebouclage (rétroaction, *feedback*) du système commandé sur le système de pilotage (figure 3) permet à ce dernier :

- de recevoir des observations (mesures) et donc de connaître l'état du système commandé ;
- de comparer le comportement observé avec le comportement désiré ;
- de corriger en conséquences la commande pour réduire les écarts.

Interaction entre les deux sous-sytèmes

Les liens entre le système de commande qui véhicule des signaux de nature informationnelle et le système commandé qui traite de signaux de nature physique se font grâce à des organes de commande (actionneurs) et des organes de mesure (capteurs) :

- un **capteur** transforme une grandeur physique en une information ;
- un **actionneur** transforme une information (*e.g.* un ordre) en une grandeur physique (*e.g.* un signal électrique).

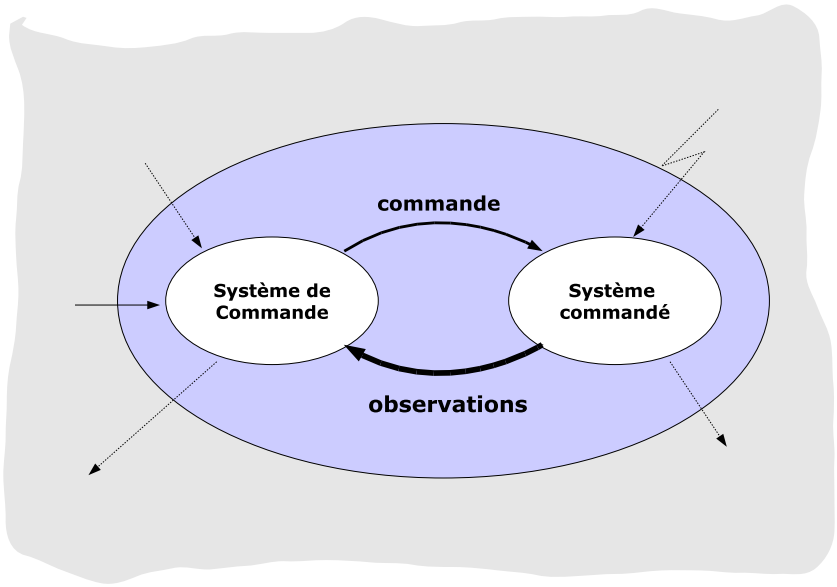


FIGURE 2 – Système commandé en boucle fermée

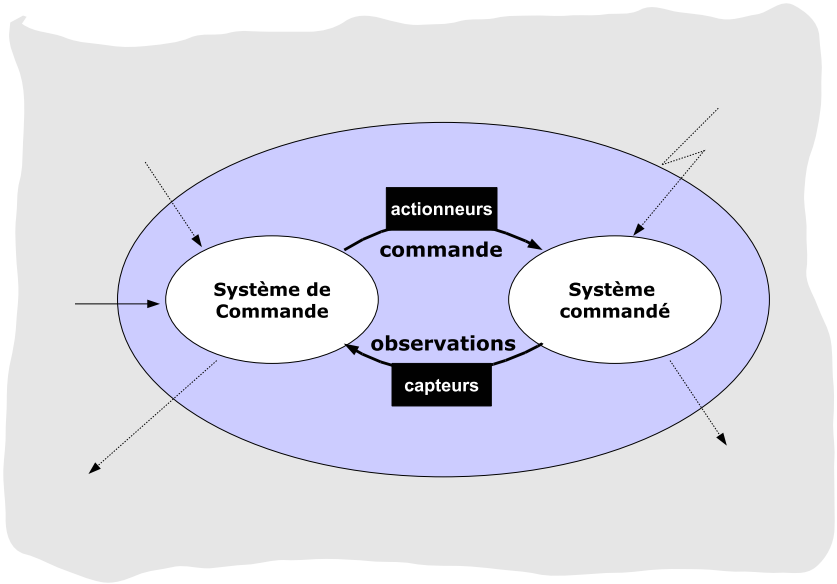


FIGURE 3 – Organes de mesure et de commande

On s'intéresse souvent au transfert entre les entrées et les sorties d'un système ; notons que :

- la commande est considérée comme une **sortie** par le système de commande et comme une **entrée** du système commandé ;
- l'observation (mesures) est considérée comme une **entrée** du système de commande et comme une **sortie** du système commandé.

Illustrations

Système mécanique – commande (régulation) automatique de la vitesse sur une voiture

La commande automatique de la vitesse d'un véhicule peut être schématiquement représentée par la figure 4.

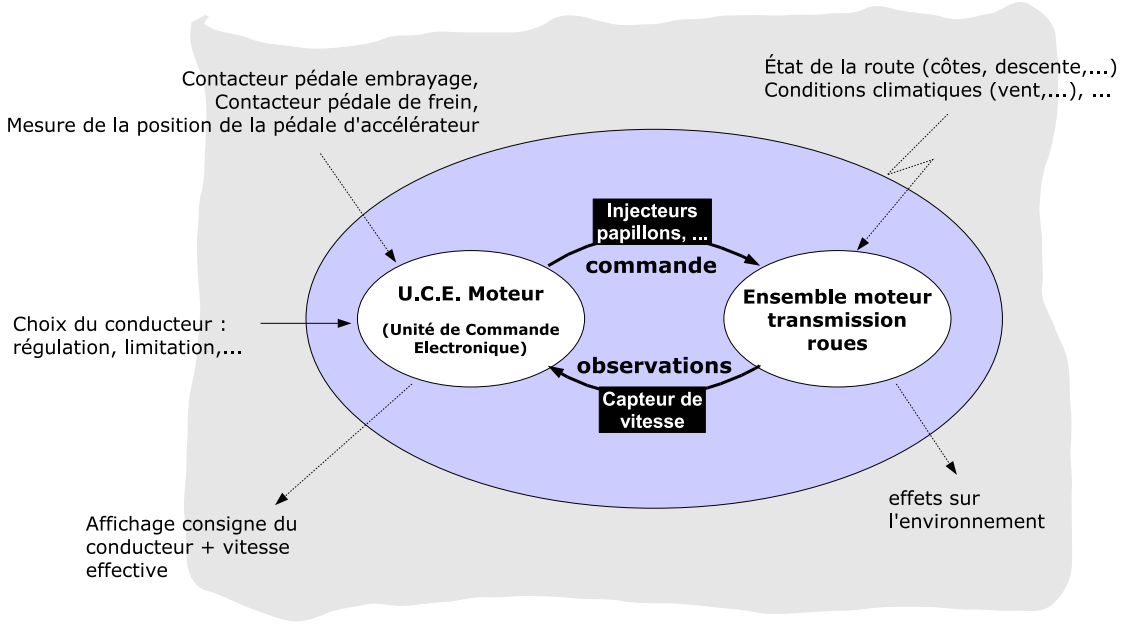


FIGURE 4 – Principe de la commande de la vitesse d'une voiture

Le pilotage est effectué par un système électronique : l'Unité de Commande Electronique (U.C.E.). Ce sous-système comprend plusieurs entrées / sorties :

- le dispositif du choix *régulation/limitation* de vitesse est une entrée. Le terme **régulation** indique que le système est piloté de telle sorte que la variable commandée (ici la vitesse de la voiture) tende vers une valeur de **consigne** (*e.g.* 90 km/h) quel que soit l'environnement (perturbations, ...) ;
- le système de commande dispose, grâce à un capteur relié à une de ses entrées, de l'information de vitesse ;
- des capteurs sur les pédales (contacteurs, mesure de la position) sont également vus comme des entrées du sous-système de commande. Si une action du conducteur sur une des trois pédales est détectée par un des capteurs, le système inhibe la régulation ou la limitation à des fins de sécurité ;
- en sortie, le système de pilotage émet des informations de commande (fonction du choix du conducteur et des informations qu'il reçoit des capteurs) aux actionneurs : ouverture des papillons, débit des injecteurs,...
- ...

Système physiologique – régulation de la glycémie

La glycémie est le taux de glucose circulant dans le sang. Chez un individu en début de jeûne (absorption intestinale teminée), la glycémie est normalement voisine de $0,9$g/l. Sa régulation peut-être représentée par le schéma de principe de la figure 5.

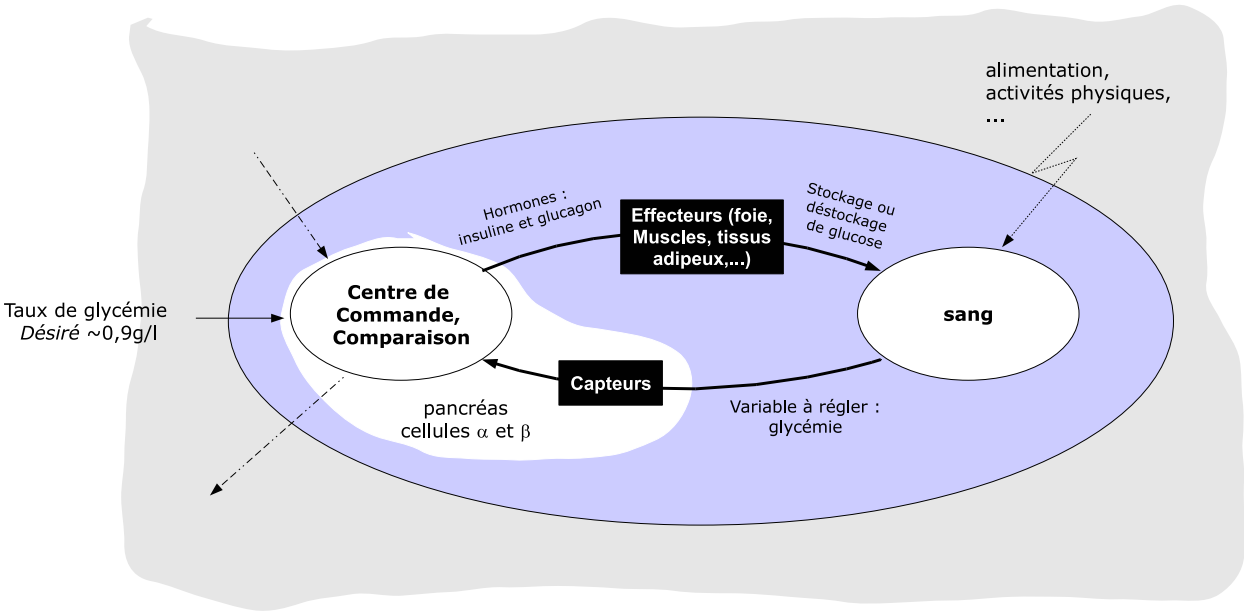


FIGURE 5 – Principe de la régulation de la glycémie

La boucle de régulation de la glycémie permet de corriger une hyperglycémie ou une hypoglycémie qui sont des états pathologiques qui peuvent se révéler très dangereux pour la survie de l'individu s'ils se prolongent trop longtemps ; elle réagit à des perturbations de deux types : lorsqu'une hyperglycémie ou une hypoglycémie est détectée chez un individu *sain*, le taux de glycémie est **corrigé** par le *centre de commande*. La glycémie est une **variable régulée** par voie hormonale :

- l'insuline a une action hypoglycémiante (stockage de glucose) ;
- le glucagon une action hyperglycémiante (distribution de glucose).

La boucle de régulation de la glycémie peut-être définie par les dispositifs (organes,. . .) et les liens (hormones, . . .) suivants :

- la perturbation extérieure est due soit à l'état nutritionnel de l'individu, soit à son activité physique ; elle peut conduire à une diminution ou à une augmentation de la glycémie ;
- la variable régulée (commandée) est la glycémie ;
- le capteur est représenté par les cellules α et β du pancréas ;
- le point de consigne (référence du taux de glycémie) est lié à des caractéristiques génétiques et physiologiques de l'organisme ;
- le point de comparaison entre le taux de glycémie et la valeur de consigne se situe dans les cellules α et β ;

- le signal d'erreur (différence entre taux de glycémie mesuré et *désiré*) est de nature différente selon si le taux de glycémie est trop faible ou trop élevé. Pour un taux trop faible, le signal d'erreur se manifeste par une augmentation de la sécrétion de glucagon ; dans le cas d'un taux trop élevé, le signal d'erreur est une élévation de la sécrétion d'insuline ;
- les effecteurs principaux sur lesquels le signal d'erreur agit sont le foie, les muscles et le tissu adipeux dans le cas de la sécrétion d'insuline et le foie dans le cas de sécrétion de glucagon.

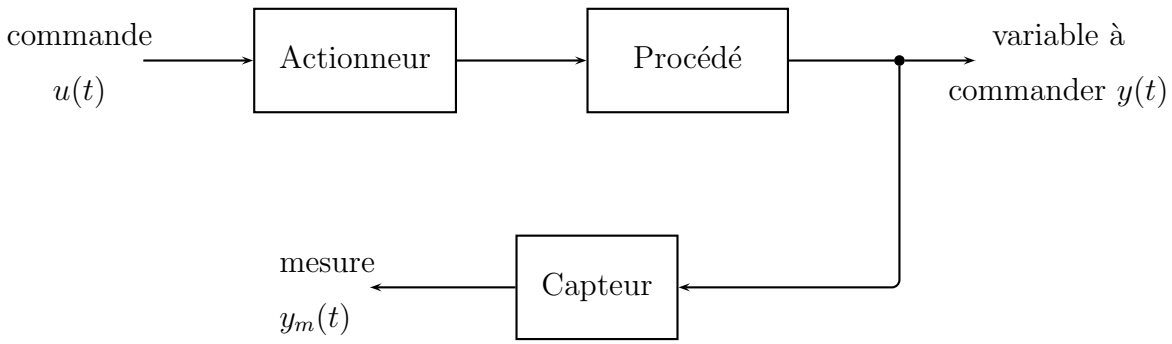
Chapitre 1

Asservissement – Boucle Fermée

1.1 Pourquoi asservir un système ? Comment asservir un système

▷ **Eléments constitutifs du *système opérant***

Pour un système SISO, le *système opérant* est constitué d'une cascade de sous-systèmes parmi lesquels on trouve, le système à commander, le capteur et l'actionneur.



- La variable à commander, notée $y(t)$, correspond à la sortie de l'asservissement ; c'est la grandeur à régler. Elle donne son nom à l'asservissement ou à la régulation : asservissement/régulation de niveau, de température, de position, ...
- Cette grandeur à régler peut être connue grâce au capteur (organe de mesure). Sur la représentation schématique des éléments constitutifs du *système opérant*, le capteur représente plus exactement l'ensemble capteur → convertisseur → transmetteur ; la variable de sortie sera transformée en une mesure exploitable par le système de commande, de régulation et correspondra à une tension continue (*e.g.* un signal compris entre −10 et +10 volts), un courant continu (*e.g.* un signal compris entre 0 et 20 mA), ...
- Le signal de commande $u(t)$ est la grandeur réglante ; c'est elle qui est déterminée par le système de commande pour commander, contrôler, réguler la variable à commander $y(t)$. Cette grandeur agit sur l'actionneur ;
- Les perturbations sont les autres grandeurs agissant sur le processus ; ce sont des variables aléatoires ;
- L'actionneur (organe de commande) permet de transformer la grandeur réglante –

informations provenant du système de commande (*e.g.* un signal compris entre 0 et +10 volts) – en une grandeur compatible avec le système à commander. Sur la représentation schématique, on suppose que l'actionneur comprend également la partie puissance-amplification (*e.g.* transformation d'un signal de faible tension – quelques volts – en une tension compatible avec la résistance d'un radiateur électrique).

Ex. Enceinte dont on souhaite réguler la température par le contrôle d'un débit de vapeur.
Le système représenté sur le schéma fonctionnel de la figure 1.1 décrit le fonctionnement d'une enceinte à chauffage indirect. Il est constitué d'une vanne que l'on va commander (application d'une tension sur un servomoteur permettant d'ouvrir ou de fermer la vanne), d'un échangeur eau–vapeur, d'une enceinte dont on veut commander la température en agissant sur la vanne et d'une pompe à débit constant. De l'ouverture de la vanne va découler le débit de vapeur, la température de l'eau dans l'échangeur le débit de vapeur et la température de l'enceinte.
La représentation par schéma-bloc du dispositif est donné sur la figure 1.2.

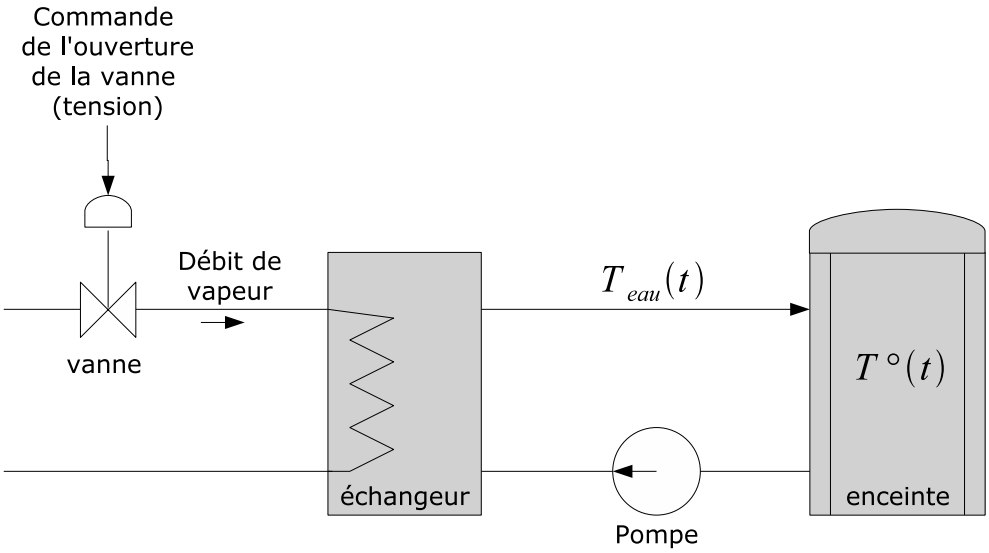


FIGURE 1.1 – Enceinte à chauffage indirect

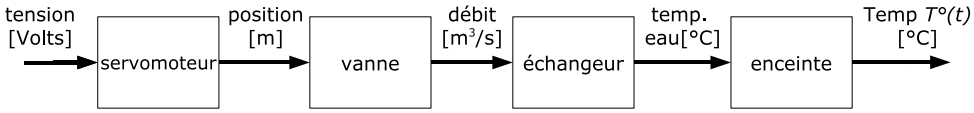


FIGURE 1.2 – Schéma-bloc du système *enceinte thermique*

▷ Principe, représentation et notations

Asservir un système, c'est construire une partie commande du procédé en utilisant l'information de sortie mesurée par un capteur[1]. On parle d'asservissement, de rebouclage, de boucle fermée,...
Le signal de consigne est le signal de référence pour la sortie.
Le schéma de principe de l'asservissement est représenté sur la figure 1.3.

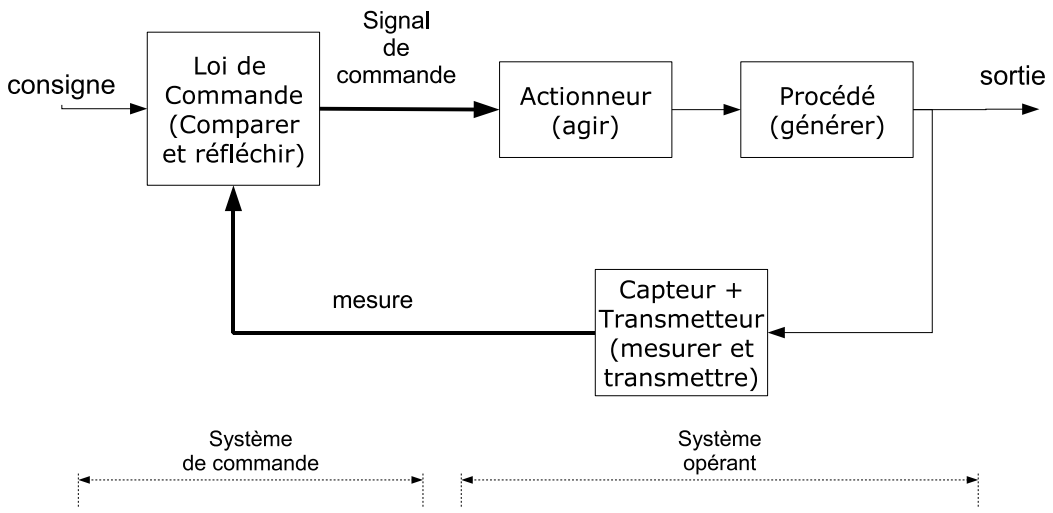


FIGURE 1.3 – Principe de l'asservissement

La partie commande est *construite* autour du comparateur qui effectue la différence entre le signal de consigne (*ce que l'on veut*) et le signal de sortie (*ce que l'on a*). Une des représentations de la partie commande est donnée sur la figure 1.4 ; apparait, en aval du comparateur, un bloc correction schématisant la loi de commande. C'est ce type de correction qui sera étudiée dans ce cours ; de façon plus générale, on peut insérer des blocs correctifs en amont du comparateur sur ses entrées + et/ou −.

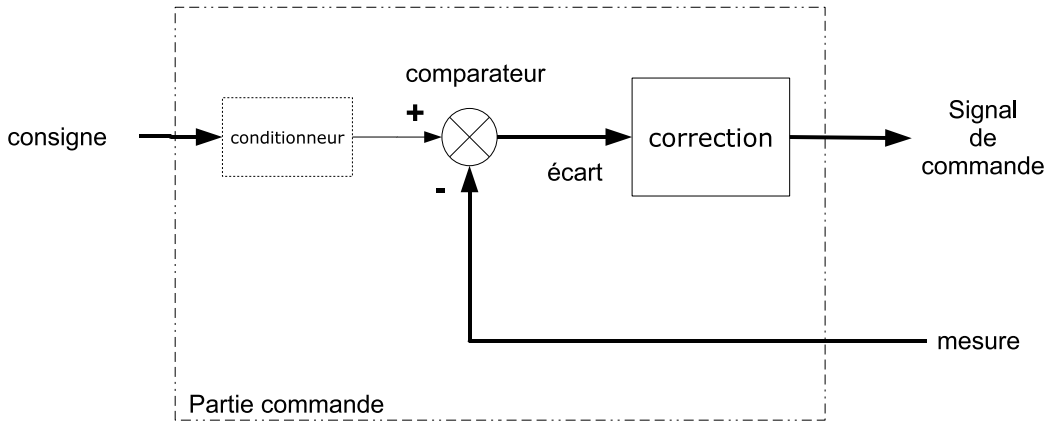


FIGURE 1.4 – Représentation de la partie commande de l'asservissement

La notion de conditionneur est expliquée un peu plus loin.

1. Le rebouclage effectué ici est un *retour de sortie* ; il existe d'autres techniques d'asservissement, comme le retour d'état, qui ne seront pas abordées dans ce cours.

▷ Asservissement analogique

Sur ce schéma-bloc 1.5, on retrouve les signaux décrits en début de chapitre : le signal de **commande** $u(t)$, le signal de **sortie** $y(t)$ et la **mesure** $y_m(t)$.

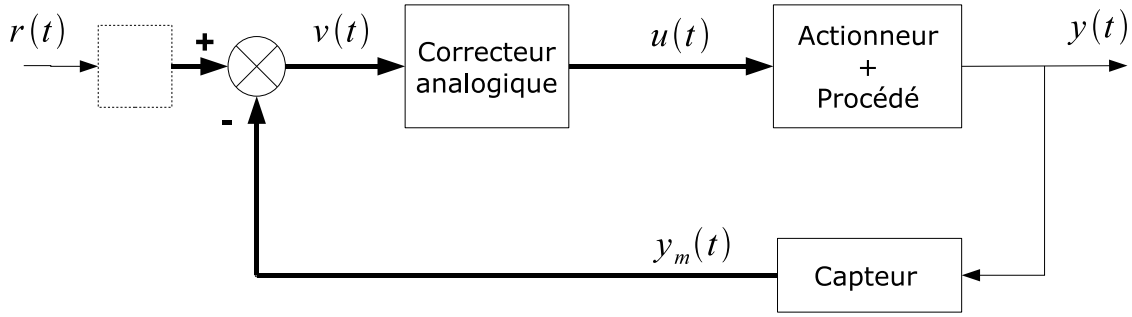


FIGURE 1.5 – Représentation par schéma-bloc d'un asservissement analogique

Le signal de **consigne**, noté $r(t)$, représente la référence, c'est à dire *ce que l'on veut* sur la sortie. L'objectif de l'automaticien sera d'élaborer une **loi de commande** (correction,...) visant à faire correspondre au mieux, en respectant des spécifications désirées, *ce que l'on a* en sortie (sortie $y(t)$) avec ce que *ce que l'on veut* (consigne $r(t)$).

Nous appellerons **erreur de l'asservissement** la différence entre la consigne $r(t)$ et la sortie $y(t)$. Nous utiliserons la notation $\varepsilon(t) = r(t) - y(t)$. Cette notion est présentée dans le paragraphe 1.3.3 page 19. L'erreur de l'asservissement est liée au signal de sortie du comparateur noté $v(t)$ appelé **écart** ou **signal d'erreur**. Notons que le signal d'erreur $v(t)$ que l'on mesure à la sortie du comparateur sera de même nature que la mesure $y_m(t)$, généralement une tension ou un courant. L'erreur, elle, est de même nature que la consigne et la sortie. Le conditionneur, qui n'a généralement pas de réalité physique, permet de représenter la transformation du signal de consigne $r(t)$, de même nature que la sortie $y(t)$, en un signal électrique comparable avec la mesure $y_m(t)$.

Ex. | Considérons l'asservissement de la température de l'enceinte représentée sur la figure 1.1.

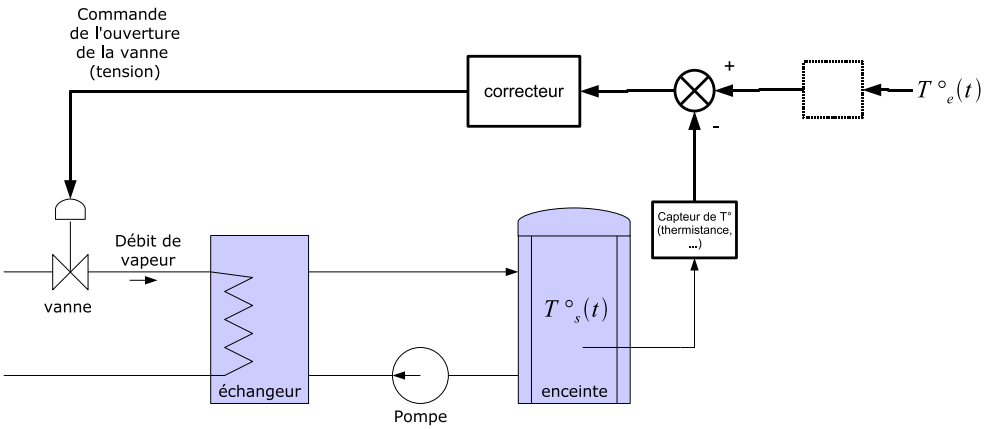


FIGURE 1.6 – Asservissement de l'enceinte à chauffage indirect

Ex.

L'adjonction de la *partie commande* conduit au schéma de la figure 1.6. Consigne $T_e^o(t)$ et sortie $T_s^o(t)$ sont des températures que l'on exprime en ^{o}C.
Le signal $T_e^o(t)$ de consigne n'a ici pas de réalité physique : *on veut* 43°C ; cette température de référence peut-être par exemple matérialisée par un bouton rotatif gradué. Derrière ce dispositif, qui sert de *conditionneur*, un circuit électrique (potentiomètre) génère une tension *image de la consigne* que l'on injecte dans l'entrée + du comparateur afin de la comparer avec la mesure qui est de même nature.

▷ Asservissement numérique

L'asservissement par calculateur (asservissement numérique) sera introduit succinctement à l'oral à partir du schéma de la figure 1.7 ; les notions d'échantillonnages, de période d'échantillonnage, de blocage, ... pour l'automatique seront rapidement introduites. La commande numérique n'est pas développé dans ce cours.

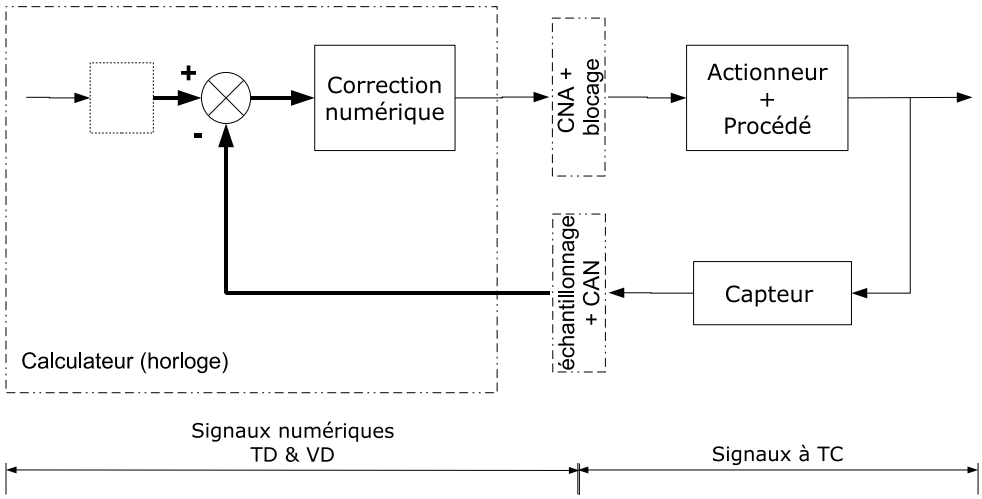


FIGURE 1.7 – Schéma de principe de l'asservissement numérique

▷ Objectifs de l'asservissement

L'asservissement, c'est à dire le rebouclage, a pour objectif :

- de compenser / rejeter des perturbations externes sur le système à commander (régulation) ;
- la stabilisation de systèmes instables en boucle ouverte ;
- de palier aux incertitudes du modèle sur lequel est basée la synthèse des lois de commande ;
- ...

▷ **Fonction d'un système asservi**

- **asservissement / poursuite** : capacité pour le signal de sortie (signal à commander) de poursuivre un signal dit de consigne qui varie ;

  Ex. | machine outil devant usiner une pièce selon un profil donné, missile qui poursuit une cible,...

- **régulation** : dans ce cas, la consigne est fixée et le système de commande doit compenser l'effet des perturbations ; réguler, c'est maintenir la grandeur réglée la plus proche possible de la valeur de consigne en agissant sur la grandeur réglante.

  Ex. | réguler la température d'un four, le niveau d'eau d'un barrage,...

1.2 Schéma-blocs et fonction de transfert en boucle fermée

Sur les figures 1.8 à 1.13 sont reportés des schémas-blocs d'asservissements fréquemment rencontrés.
$G(p)$ représente généralement le modèle fonction de transfert du procédé (actionneur compris) ; $H(p)$ est le modèle de l'organe de mesure (capteur).

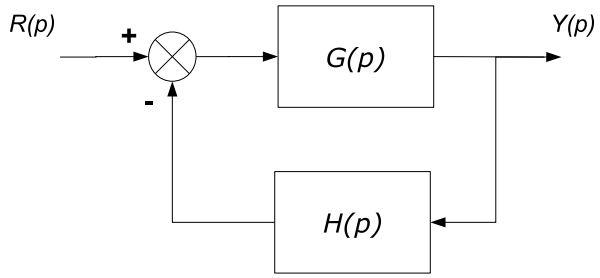


FIGURE 1.8 – boucle fermée n°1

Parfois il est nécessaire de *conditionner* le signal de consigne pour l'adapter à la mesure afin de pouvoir les comparer : $L(p)$ est le transfert qui décrit cette opération (figure 1.9).

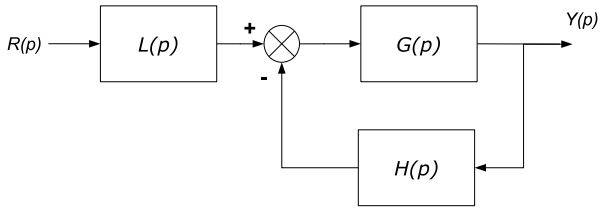


FIGURE 1.9 – boucle fermée n°2

Sur les figures 1.11, 1.12 et 1.13, la fonction de transfert $D(p)$ correspond au modèle mathématique du correcteur analogique.

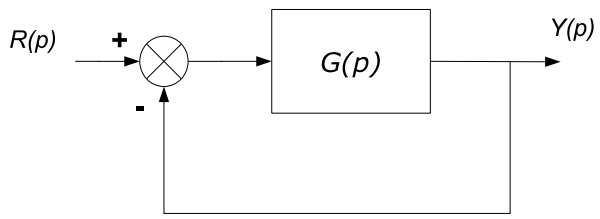


FIGURE 1.10 – boucle fermée n°3 (asservissement à retour unitaire)

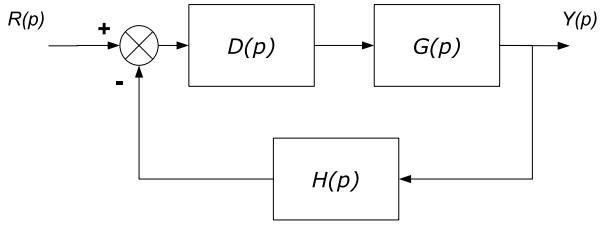


FIGURE 1.11 – boucle fermée n°4

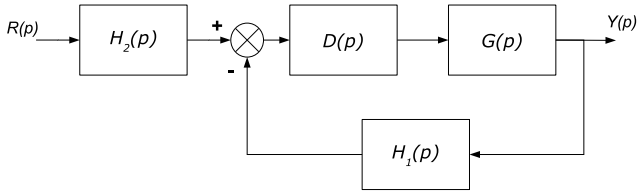


FIGURE 1.12 – boucle fermée n°5

La prise en compte d'une perturbation sur le système bouclé peut être modélisée comme sur la figure 1.13 où $\omega(p)$ est la transformée de Laplace du signal de perturbation.

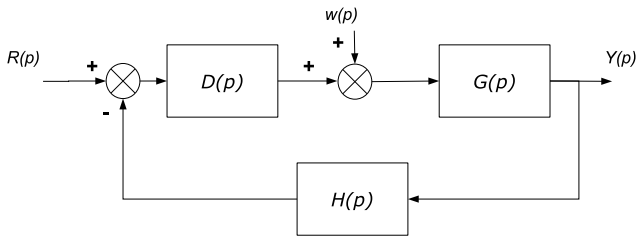


FIGURE 1.13 – boucle fermée n°6

Montrer que les fonctions de transfert $F(p) = \frac{Y(p)}{R(p)}$ en boucle fermée s'écrivent :

1. $F(p) = \frac{G(p)}{1+G(p)H(p)}$;
2. $F(p) = L(p) \times \frac{G(p)}{1+G(p)H(p)}$;
3. $F(p) = \frac{G(p)}{1+G(p)}$;
4. $F(p) = \frac{D(p)G(p)}{1+D(p)G(p)H(p)}$;

5. $F(p) = H_2(p)\,\frac{D(p)G(p)}{1+D(p)G(p)H_1(p)}$.

Dans le cas n°6, le transfert consigne-sortie $\frac{Y(p)}{R(p)}$ ne peut s'écrire directement : on écrit l'expression de la sortie $Y(p)$ en fonction des entrées consigne $R(p)$ et perturbation $\omega(p)$.

Montrer que $Y(p)$ s'écrit :

$$Y(p) = \frac{D(p)G(p)}{1\,+\,D(p)G(p)H(p)}\,R(p) \quad + \quad \frac{G(p)}{1\,+\,D(p)G(p)H(p)}\,\omega(p)$$

1.3 Performances d'un système asservi

1.3.1 L'allure de la réponse d'un système asservi

La figure 1.14 est un exemple de la réponse « indicielle » d'un système asservi ; cette réponse est, dans le cas de l'exemple de la figure, oscillatoire amortie.

N.B. | La sortie d'un système soumis à une entrée de type échelon est appelée réponse indicielle ; elle permet d'obtenir des caractéristiques temporelles intéressantes pour l'évaluation des performances dynamiques.

Dans le cas de la réponse représentée sur la figure 1.14, le comportement est oscillatoire amorti ; on peut observer d'autres comportements : apériodique et/ou non amorti.

Sur la réponse indicielle, on peut relever trois caractéristiques :
- premier dépassement ;
- temps de réponse ;
- temps de montée.

Ces caractéristiques seront détaillées ultérieurement.

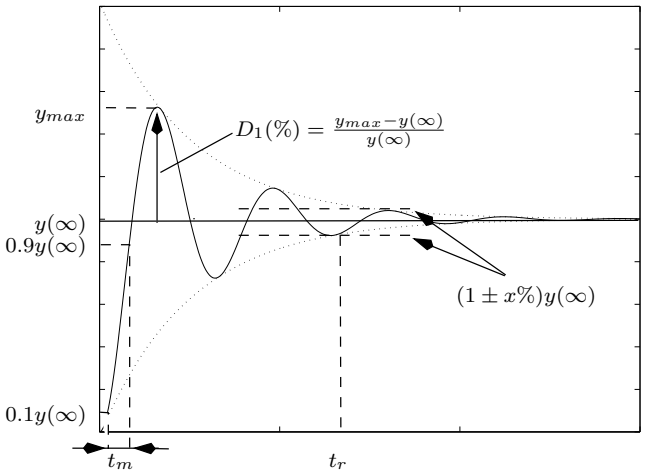


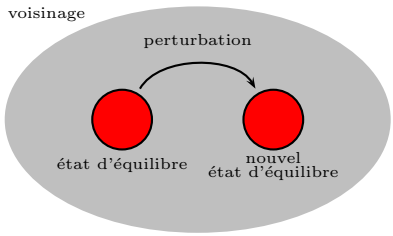
FIGURE 1.14 – Caractéristiques de la réponse indicielle

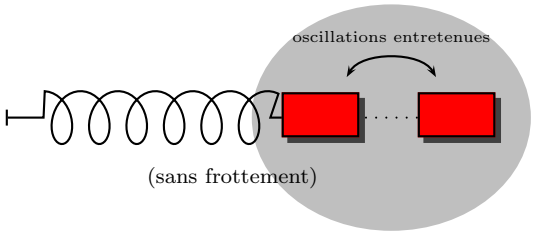
1.3.2 La stabilité

▷ Stabilité d'un régime permanent (cas d'un état d'équilibre)

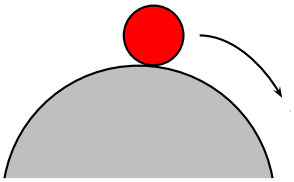
Ce type de stabilité est relatif au comportement du système lorsqu'on l'écarte de sa position d'équilibre.

→ Stabilité simple



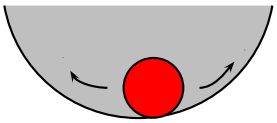


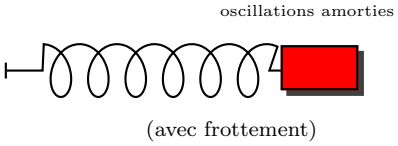
A partir d'un état d'équilibre, le régime libre du système consécutif à une perturbation ne s'éloigne pas infiniment de celui-ci (l'état du système reste dans le *voisinage* de l'état d'équilibre initial).
Si, suite à une perturbation, on ne peut trouver un voisinage qui ne puisse circonscrire l'évolution du système, l'état d'équilbre est **instable**.



→ Stabilité asymptotique

Un état d'équilibre est **asymptotiquement stable** si l'évolution de l'état du système suite à une perturbation converge vers ce premier.





▷ Stabilité Entrée Bornée / Sortie Bornée

Un système est EBSB–stable (BIBO [2]–stable) si à toute entrée bornée correspond une sortie bornée.

2. *Bounded Input - Bounded Output*

▷ Degré de stabilité – premier dépassement

Le premier dépassement, généralement noté D_1, est caractéristique du degré de stabilité de l'asservissement Il s'exprime en pourcentage. Sa valeur se calcule par la formule générale $D_1(\%) = \frac{y_{max} - y(\infty)}{y(\infty)}$ apparaissant dans la figure 1.14.

Quelques illustrations de dépassement sont données sur la figure 1.15.

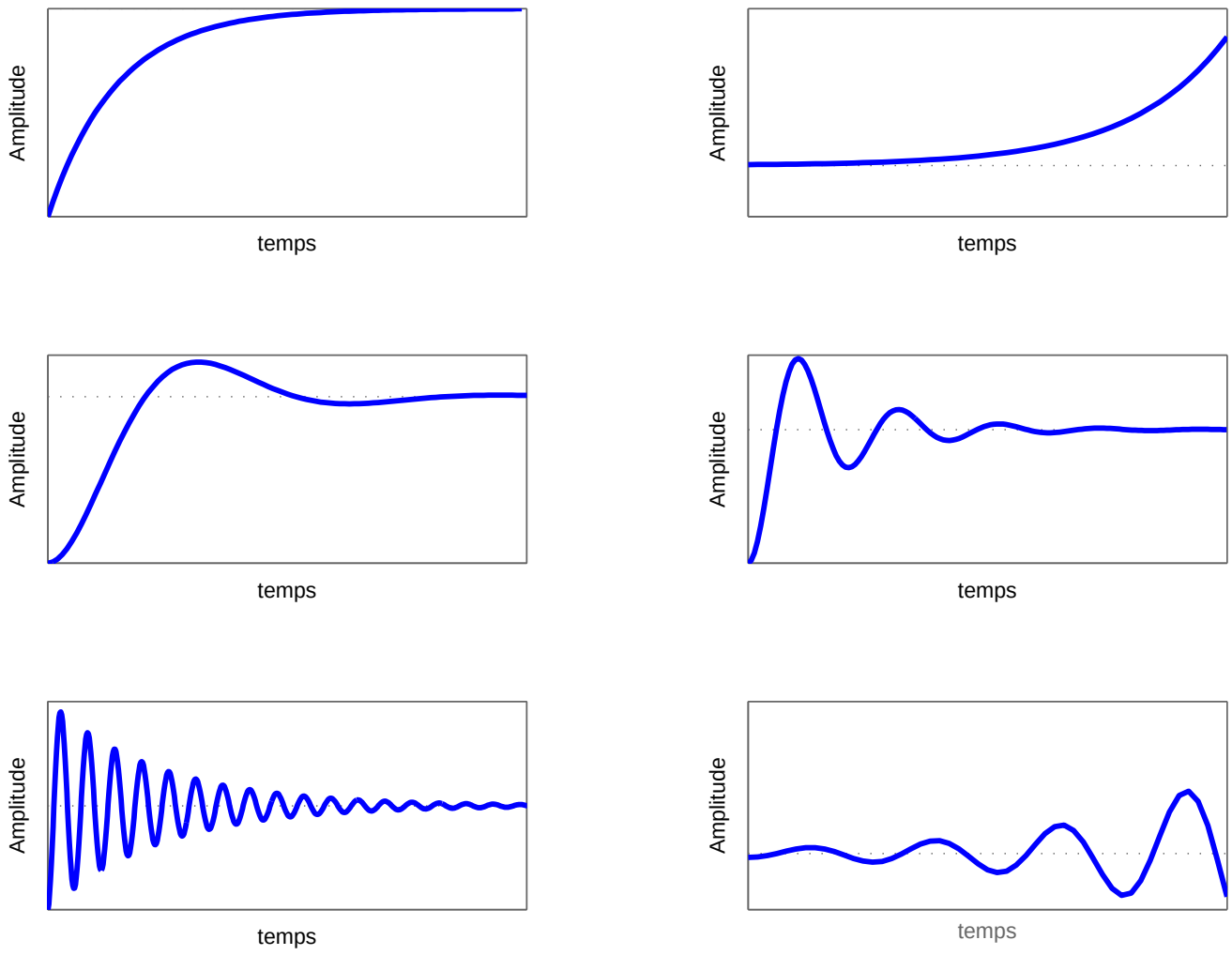


FIGURE 1.15 – Stabilité et degré de stabilité

Naturellement, plus un système (ou plus exactement sa réponse « indicielle ») *dépassera*, plus son degré de stabilité sera faible.

1.3.3 La précision

La précision est donnée par le calcul de l'erreur entre la consigne $r(t)$ (ce que l'on désire avoir) et la sortie $y(t)$ (ce que l'on a)

$$\varepsilon(t) = r(t) - y(t)$$

L'erreur statique ou précision statique est relevée en régime permanent ; elle se note :

$$\varepsilon = \lim_{t \to \infty} \varepsilon(t)$$

La mesure de l'erreur est illustrée sur la figure 1.16 pour l'**erreur de position** (consigne $r(t)$ de type échelon de position) et sur la figure 1.17 pour l'**erreur de vitesse** encore appelée **erreur de traînage** (consigne $r(t)$ de type rampe).

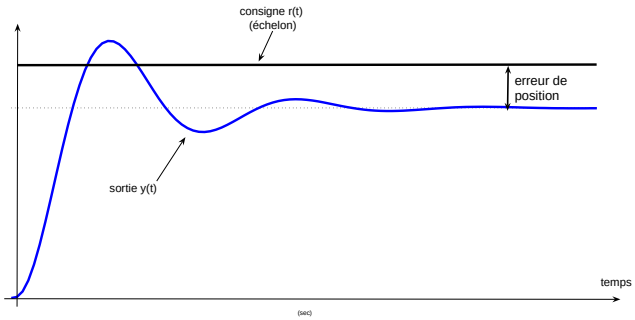


FIGURE 1.16 – Illustration de l'erreur de position

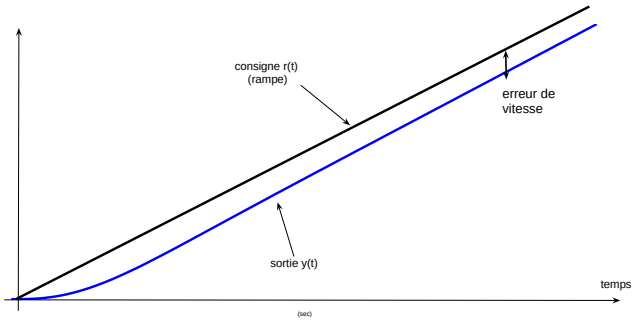


FIGURE 1.17 – Illustration de l'erreur de vitesse ou de traînage

1.3.4 La rapidité – temps de réponse

La rapidité d'un asservissement peut-être évaluée par la mesure du temps de réponse. Cette grandeur est lue sur la réponse « indicielle »dont un exmple est donné sur la figure 1.14. Le temps de réponse – noté généralement t_r – désigne l'instant à partir duquel on considère que le système quitte le régime transitoire. On le mesure à partir de l'instant où la réponse du système $y(t)$ reste comprise dans un canal de $\pm x\%$ autour de la valeur finale notée $y(\infty)$. On parle généralement de temps de réponse à 5% : $x = 5$.
Quelques illustrations de temps de réponse sont données sur la figure 1.18.

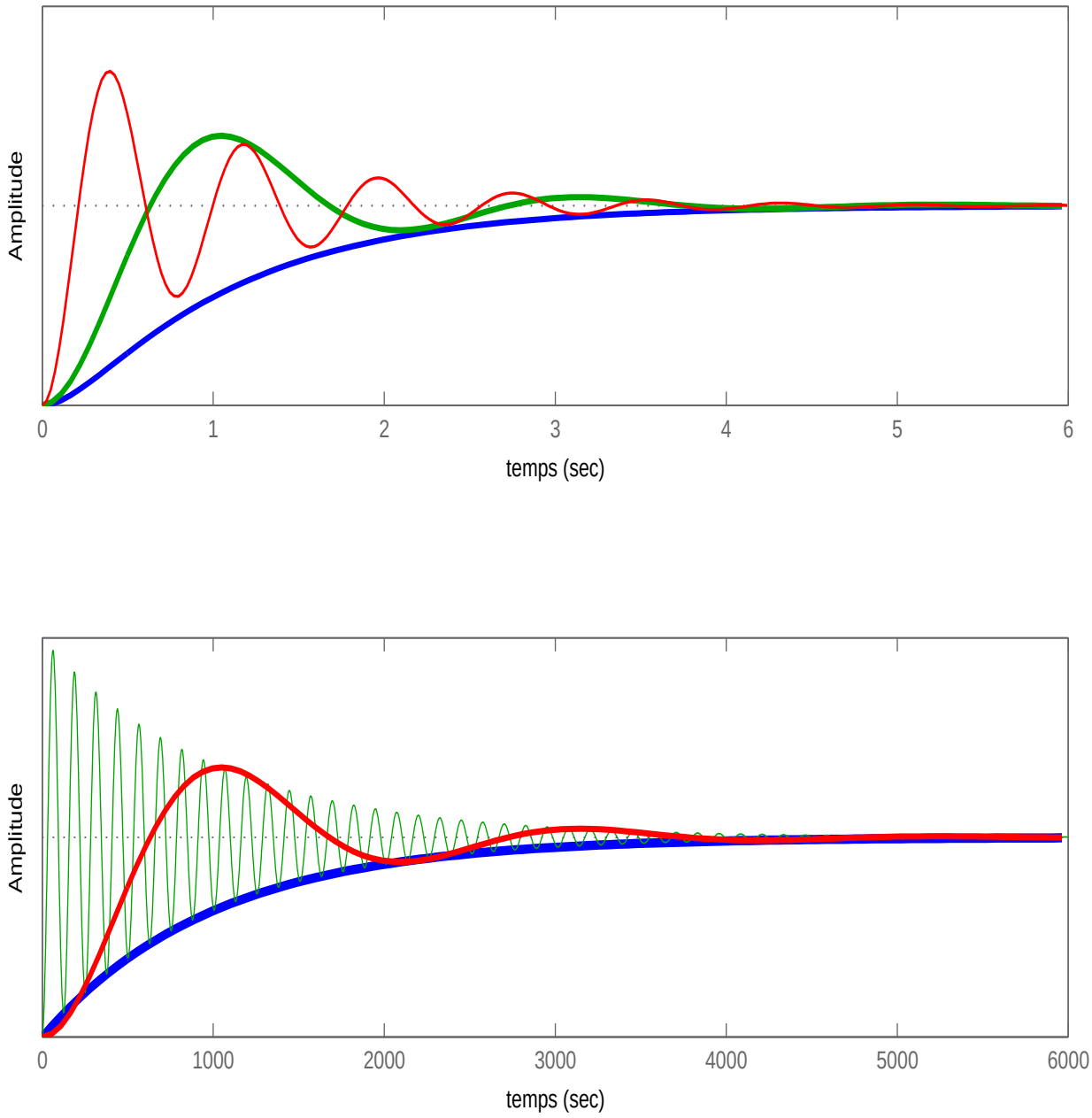


FIGURE 1.18 – La rapidité

1.3.5 La raideur – temps de montée

La raideur (nervosité, *pêche*, ...) d'un asservissement peut-être évaluée par la mesure du temps de montée. Cette grandeur est lue sur la réponse « indicielle » dont un exemple est donné sur la figure 1.14. C'est le temps généralement noté t_m que met la réponse système pour évoluer de 10% à 90% de sa valeur finale $y(\infty)$. Il donne une idée de la « nervosité » du système.
Quelques illustrations de temps de montée sont données sur la figure 1.19.

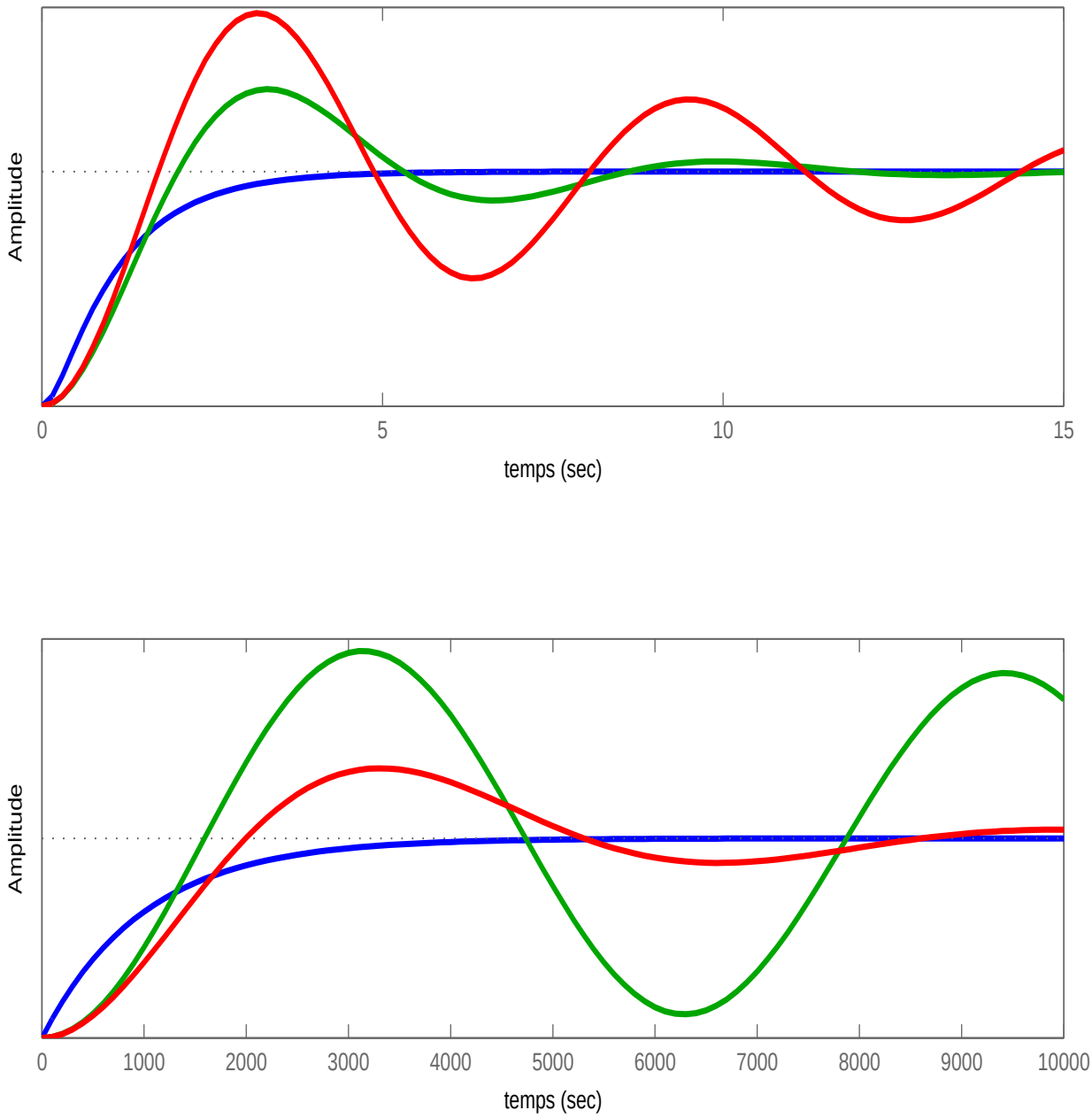


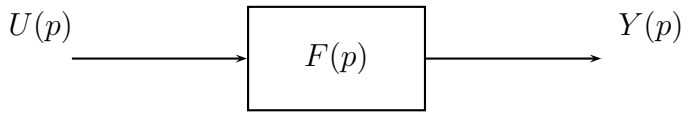
FIGURE 1.19 – Illustration de la raideur

Chapitre 2

Analyse d'un asservissement Approche fréquentielle

2.1 Caractérisation de la stabilité d'un S.L.I. (Rappel)

2.1.1 A partir de l'examen des pôles de la fonction de transfert



$$Y(p) \;=\; F(p)U(p) \quad + \quad \underbrace{\frac{I(p)}{D_F(p)}}_{\text{rép. engendrée par les C.I.}}$$

Il faut et il suffit que les pôles de $F(p)$ soient à partie réelle strictement négative pour que toute entrée $u(t)$ bornée se transforme en une sortie $y(t)$ bornée ($\forall$ C.I.).

Ex.

$F(p) = \frac{30}{(p+5)(p+2)}$

Les pôles de F(p) sont -2 et -5. Si $U(p) = \mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{u_0}{p}$ (bornée) et si les conditions initiales sont nulles alors (voir figure 2.1) :

$$Y(p) = \frac{30\,u_0}{p(p+5)(p+2)} \Longrightarrow \underbrace{y(t)}_{\text{bornée}} = u_0\,(3 + \underbrace{2e^{-5t} - 5e^{-2t}}_{\text{2 modes convergents}}\,)\mathcal{U}(t)$$

Ex.

$F(p) = \frac{30}{(p+5)(p-2)}$

Les pôles de F(p) sont $+2$ et -5. Si $U(p) = \mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{u_0}{p}$ (bornée) et si les conditions initiales sont nulles alors (voir figure 2.1) :

$$Y(p) = \frac{30\,u_0}{p(p+5)(p+2)} \Longrightarrow \underbrace{y(t)}_{\text{divergente}} = u_0\,(-3 + \frac{30}{35}e^{-5t} + \underbrace{\frac{30}{14}e^{+2t}}_{\text{mode divergent}}\,)\mathcal{U}(t)$$

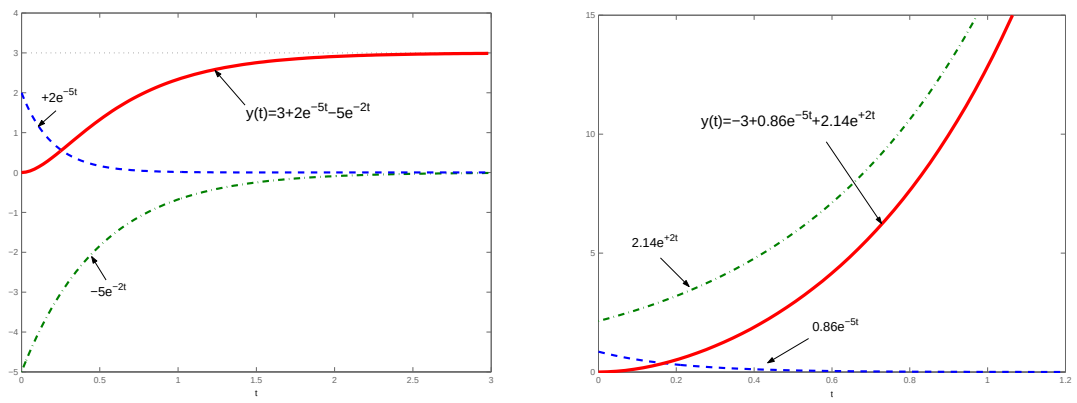


FIGURE 2.1 – Illustration de modes convergents et divergents (ici, $u_0 = 1$)

2.1.2 Critère algébrique de Routh

Pour faire l'analyse de la stabilité d'un système, il faut donc calculer les pôles de son modèle fonction de transfert. Cela peut être fastidieux et parfois ces pôles dépendent d'un ou de plusieurs paramètres (*e.g.* d'un gain).

Le critère algébrique de Routh permet de savoir si un polynôme n'a pas de racine à partie réelle positive. Il permet également de conclure sur les conditions que doivent remplir les éventuels paramètres (gain, ...) dans le cas où le polynôme considéré serait fonction de ces derniers.

Considérons le système de fonction de transfert

$$F(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$$

D'après le paragraphe précédent, pour que $F(p)$ soit stable, il faut et il suffit que le polynôme

$$D(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0$$

n'admette que des racines à partie réelle strictement négative.

→ **Condition nécessaire de stabilité**

Les coefficients a_i $(i = 0, \cdots, n)$ doivent tous être de même signe et non nuls. Cette condition est **nécessaire mais pas suffisante**.

Ex. Le système de fonction de transfert $F(p) = \frac{k}{p^3+7p^2-2p+4}$ n'est pas stable ; à cause du coefficients -2 présent dans le dénominateur de $F(p)$, la condition nécessaire n'est pas remplie.

→ **Condition nécessaire et suffisante de stabilité**

Le modèle de fonction de transfert $F(p)$ sera stable si les coefficients a_i satisfont le critère de Routh.

Table de Routh

$$\begin{array}{c|cccc}
p^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\
p^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots \\
p^{n-2} & b_1 & b_2 & \cdots & \\
p^{n-3} & c_1 & c_2 & \cdots & \\
\vdots & & & &
\end{array}$$

Avec

$$b_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$$

$$b_2 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$$

$$\vdots$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_{n-3} - b_2 a_{n-1}}{b_1}$$

Critère de Routh

- CNS de stabilité : les éléments de la première colonne de la table de Routh sont de même signe ($\neq 0$) ;
- Le nombre de racines à partie réelle positive du polynôme $D(p)$ est égal au nombre de changements de signe dans la première colonne de la table de Routh.

Ex. A partir du critère de Routh, analyser la stabilité des modèles suivants :

$$F_1(p) = \frac{k}{p^4+7p^3+17p^2+17p+6}$$

$$F_2(p) = \frac{k}{p^4+2p^3+2p^2+5p+6}$$

2.2 Stabilité et performance en précision d'un asservissement

2.2.1 Notations

Pour introduire les notations et le vocabulaire nécessaires à l'étude des asservissements, on choisit la boucle fermée simplifiée vue dans le paragraphe 1.2, figure 1.8, que l'on reporte, enrichie de notations, sur la figure 2.2.

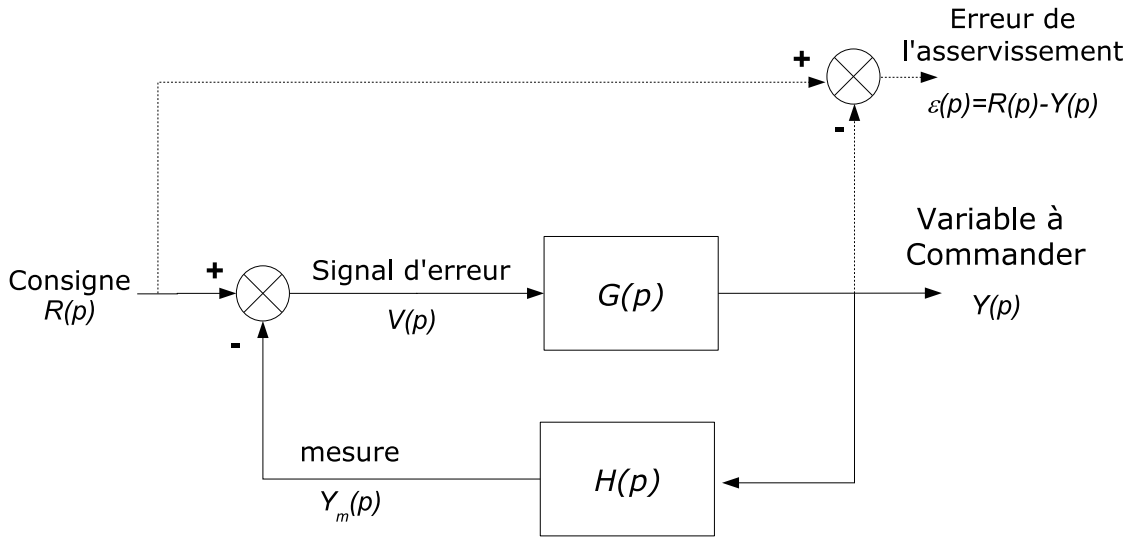


FIGURE 2.2 – Notations pour un système asservi

▷ **Chaîne directe**

$$G(p) = \frac{Y(p)}{V(p)}$$

où $V(p)$ est appelé le signal d'erreur [1], signal de sortie du comparateur.

▷ **Chaîne retour**

$$G(p) = \frac{Y_m(p)}{Y(p)}$$

▷ **Fonction de transfert en Boucle Ouverte – BO**

$$T(p) = G(p) \times H(p)$$

1. ne pas confondre avec l'erreur $\varepsilon(p)$; ces deux valeurs sont toutefois liées et souvent proportionnelles mais pas forcément de même nature.

▷ **Fonction de transfert en Boucle Fermée – BF – système asservi**

$$F(p) = \frac{Y(p)}{R(p)} = \frac{G(p)}{1 + G(p)H(p)} = \frac{G(p)}{1 + T(p)}$$

▷ **Erreur de l'asservissement**

$$\begin{aligned} \varepsilon(p) &= R(p) - Y(p) \\ &= (1 - F(p))\, R(p) \end{aligned}$$

Ex. | Ecrire la fonction de transfert en boucle ouverte $T(p)$ de l'asservissement de la figure 1.12 (page 15, paragraphe 1.2).

2.2.2 Analyse de la stabilité d'un asservissement

▷ **Par le critère de Routh**

Considérons un asserssivement à retour unitaire (fonction de transfert de la chaîne retour $H(p) = 1$) avec une loi de commande proportionnelle c'est à dire une loi de commande élémentaire pour laquelle le correcteur $D(p)$ est un simple gain variable : $D(p) = k$.

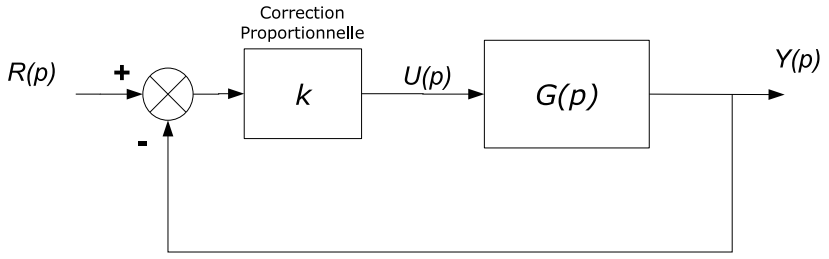


FIGURE 2.3 – Système asservi avec une correction proportionnelle de gain k

Pour connaître la stabilité de l'asservissement, on écrit la fonction de transfert du système en boucle fermée et on applique le critère de Routh.
Pour $G(p) = \frac{1}{p(p+1)(p+2)}$, on a :

$$F(p) = \frac{kG(p)}{1 + kG(p)} = \frac{k}{p^3 + 3p^2 + 2p + k}$$

En notant $T(p) = kG(p)$ la fonction de transfert en boucle ouverte, l'équation caractéristique de l'asservissement $1 + T(p) = 0$ s'écrit :

$$p^3 + 3p^2 + 2p + k = 0$$

La stabilité de l'asservissement va dépendre des pôles de la fonction de transfert en boucle fermée $F(p)$ qui sont les racines de l'équation caractéristique $1 + T(p) = 0$. Nous utilisons le critère de Routh pour connaître quelles conditions doit remplir le gain k pour que l'asservissement soit stable.

- **condition nécessaire** : tous les coefficients de l'équation caractéristique sont de même signe ;

→ **condition nécessaire et suffisante**

$$\begin{array}{c|cc} p^3 & 1 & 2 \\ p^2 & 3 & k \\ p^1 & \frac{6-k}{3} & 0 \\ p^0 & k & \end{array}$$

L'asservissement sera stable si

$$\begin{cases} \frac{6-k}{3} > 0 \\ k > 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad 0 < k < 6$$

▷ **Par un critère géométrique – le critère du revers**

→ **Présentation du critère**

Les critères géométriques permettent de conclure sur l'existence de pôle(s) de la **Boucle Fermée** $F(p)$ à partie réelle non négative (et donc de conclure sur sa stabilité) à partir de la réponse harmonique de la fonction de transfert en **Boucle Ouverte** $T(p)$.

Le critère présenté dans ce cours (critère du revers) est un critère simplifié du **critère de Nyquist** (hors programme) appliqué lorsque la condition suffisante « aucun élément de la Boucle Ouverte n'admet de pôles à partie réelle strictement positive » est vraie.

■ Enoncé du critère du revers

Un système en **Boucle Fermée** dont la fonction de transfert en **Boucle Ouverte** n'admet pas de pôles à partie réelle positive **est stable** si et seulement si en parcourant **le lieu de Nyquist** de la fonction de transfert en **Boucle Ouverte** dans le sens des ω croissants, on laisse le **point critique** $(-1, 0)$ à gauche.

■ Illustration sur l'exemple précédent

La fonction de transfert en Boucle Ouverte

$$T(p) = \frac{k}{p(p+1)(p+2)}$$

remplit la condition d'application du critère du revers. Le lieu de transfert $T(j\omega)$ en Boucle Ouverte est donné sur la figure 2.4 pour différentes valeurs de k représentatives.

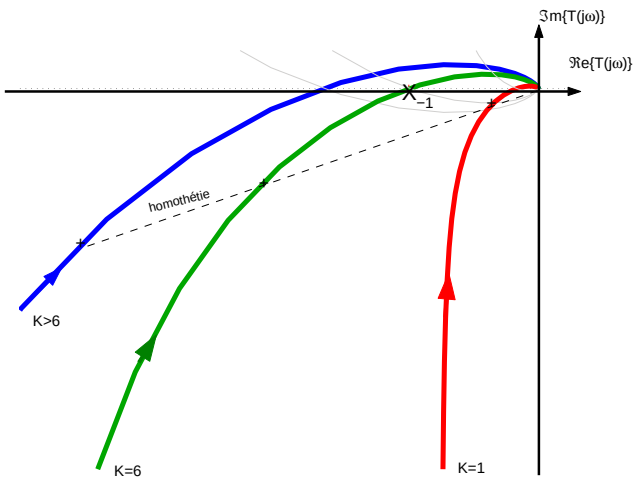


FIGURE 2.4 – Critère du revers – tracés de $T(j\omega)$ pour $k = 1$, $k = 6$ et $k > 6$

■ Lecture du critère dans le plan de Bode

Le lieu de transfert $T(j\omega)$ de la boucle ouverte dans le plan de bode est donné, pour l'exemple précédent, sur la figure 2.5.

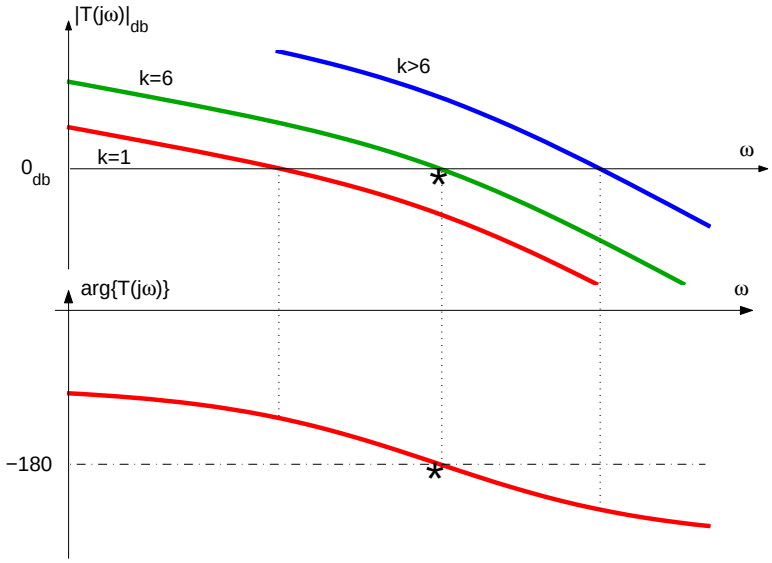


FIGURE 2.5 – Tracés de $T(j\omega)$ pour $k = 1$, $k = 6$ et $k > 6$ dans le plan de Bode

⇝ Pour $k < 6$, la phase de $T(j\omega)$ lorsque son module $|T(j\omega)|_{db} = 0$ est supérieure à $-180^o \rightarrow$ stabilité de la boucle fermée.

⇝ Pour $k = 6$, la phase de $T(j\omega)$ égale -180° pour $|T(j\omega)|_{db} = 0 \rightarrow$ limite de stabilité de la boucle fermée.

⇝ Pour $k > 6$, la phase de $T(j\omega)$ est inférieure à -180° pour $|T(j\omega)|_{db} = 0$ $\rightarrow$ système asservi instable.

→ Marges de stabilité d'un asservissement

- Intérêt : évaluer le *degré de stabilité* d'un asservissement *i.e.* la proximité avec sa limite de stabilité repérée dans le plan de Bode par le gain O_{db} et la phase -180° (le point $(O_{db}, -180^o)$ correspondant au point critique $(-1, 0)$ du plan de Nyquist).
- Cette marge de stabilité amène une notion de *robustesse* de l'asservissement (incertitudes, erreurs de modélisation,...)

■ Marge de gain (mesurée en dB dans le plan de Bode)

$$M_G = 0_{db} - |T(j\omega_{-180^o})|_{db}$$

où ω_{-180°} est la pulsation pour laquelle $\arg\{T(j\omega)\} = -180^o$; l'illustration est portée sur la figure 2.6.

■ Marge de phase

$$M_\phi = \arg\{T(j\omega_{0db})\} - (-180^o)$$

où ω_{0db} est la pulsation pour laquelle $|T(j\omega_{0db})|_{db} = 0$ (voir figure 2.6).

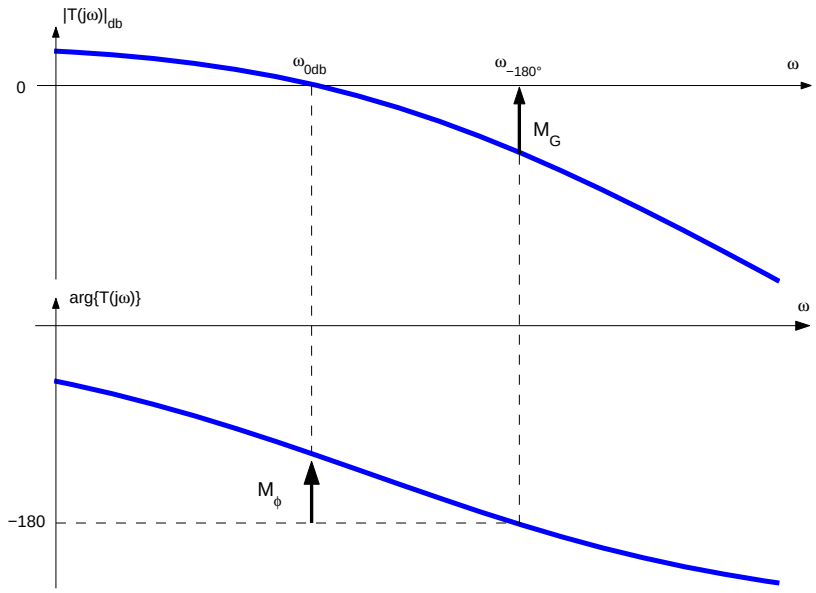


FIGURE 2.6 – Marge de phase et marge de gain mesurées dans le plan de bode

Le système asservi est stable si les marges de stabilité, mesurées sur le lieu de transfert en boucle ouverte, sont positives : $M_\phi > 0$ (↑) et $M_G > 0$ (↑).

N.B. Attention à l'orientation des marges sur le lieu de transfert.

Valeurs *couramment* rencontrées pour de *bonnes performances* d'un asservissement : M_ϕ de l'ordre de 45° et M_G au delà de $5db$.

Application Matlab

La commande `margin` permet d'obtenir la réponse harmonique d'une fonction de transfert dans le plan de Bode sur lequel sont reportées les marges de phase et de gain. La commande `margin` n'a de sens que si la fonction de transfert considérée est la fonction de transfert en boucle ouverte !

```
>> margin(T)
```

A titre d'information, les marges de stabilité mesurées sur le lieu de transfert dans le plan de Black, sont reportées sur la figure 2.7.

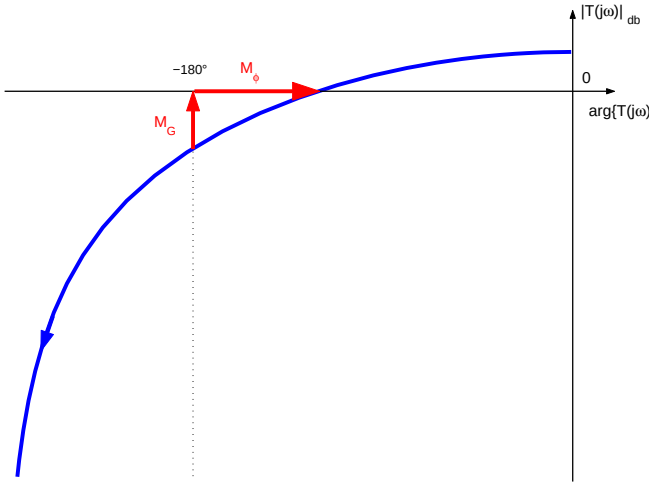


FIGURE 2.7 – Marge de phase et marge de gain mesurées dans le plan de Black

N.B. le lieu représenté sur la figure 2.7 ne correspond pas à l'exemple $T(p) = \frac{k}{p(p+1)(p+2)}$. Pour vous entraîner, tracer le lieu de transfert de $T(p)$ dans le plan de Black pour $k = 1$, $k = 6$ et $k > 6$ et y reporter les marges de stabilité.

2.2.3 Performances en précision d'un asservissement

Les asservissements considérés ici sont asymptotiquement stables ; on recherche la valeur de l'erreur en régime permanent.

▷ Calcul de l'erreur

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= r(t) - y(t) \\ \varepsilon(p) &= R(p) - Y(p) \\ &= (1 - F(p))\, R(p) \end{aligned}$$

A partir de l'expression de $\varepsilon(p)$ et du théorème de la valeur finale, on peut en déduire l'erreur en **régime permanent** :

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{t \to \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \to 0} p\,\varepsilon(p)$$

N.B. | Cette limite n'a de sens physique que si $p\,\varepsilon(p)$ admet uniquement des pôles à partie réelle négative.

▷ Cas particulier d'un asservissement à retour unitaire

Prenons l'asservissement à retour unitaire avec une correction de fonction de transfert $D(p)$ (figure 2.8).

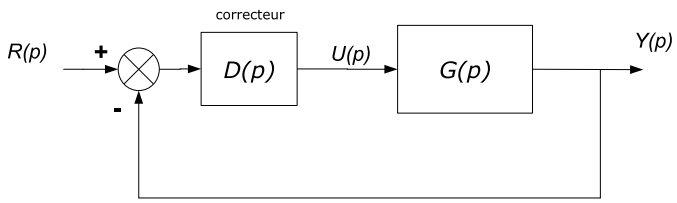


FIGURE 2.8 – Système asservi avec un correcteur de fonction de transfert $D(p)$

Soit α le nombre d'intégrations pures (nombre de pôles en 0) de la fonction de transfert de la chaîne directe $D(p)G(p)$.

- <u>Cas $\alpha = 0$</u> : $G(p)$ ne contient pas d'intégration (on parle d'asservissement de type 0)

  Soit $K = D(0)G(0)$ le gain statique ; il vient :

$$\begin{cases} \varepsilon_p = \frac{r_0}{1+K} \\ \varepsilon_v = +\infty \\ \varepsilon_a = +\infty \\ \vdots \end{cases}$$

- <u>Cas $\alpha = 1$</u> : $G(p)$ contient une intégration (asservissement de type I) Soit $K = p\,D(0)G(0)$ le gain en vitesse ; il vient :

$$\begin{cases} \varepsilon_p = 0 \\ \varepsilon_v = \frac{r_0}{K} \\ \varepsilon_a = +\infty \\ \vdots \end{cases}$$

- <u>Cas $\alpha = 2$</u> : $G(p)$ contient deux intégrations (asservissement de type II) Soit $K = p^2\,D(0)G(0)$ le gain en accélération ; il vient :

$$\begin{cases} \varepsilon_p = 0 \\ \varepsilon_v = 0 \\ \varepsilon_a = \frac{r_0}{K} \\ \vdots \end{cases}$$

- ...

▷ Exemples

Ex. Considérons l'asservissement à retour unitaire de la figure 2.8. Pour $G(p) = \frac{10}{1+7p}$ et $D(p) = \frac{1}{p^\alpha}$.
Retrouver les résultats du paragraphe précédent pour $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$.

Ex. Considérons l'asservissement de la figure 2.9 pour lequel $G(p) = \frac{2}{7p+1}$, $H(p) = \frac{4}{p+2}$ et $D(p) = \frac{1}{p}$.
Montrer que $\varepsilon_p = \frac{r_0}{2}$ et $\varepsilon_v \to \infty$.

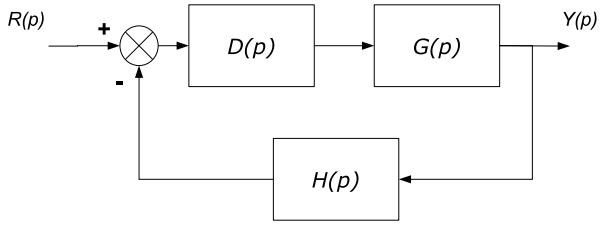


FIGURE 2.9 – Asservissement considéré

2.2.4 Illustration du compromis précision / stabilité à partir d'un exemple

Soit l'asservissement de la figure 2.10 avec $G(p) = \frac{1}{p(p+1)(p+2)}$.

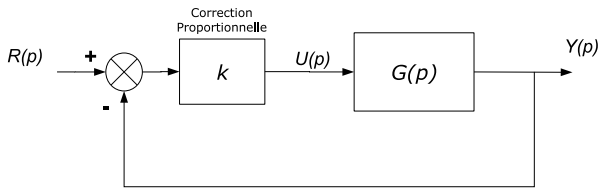


FIGURE 2.10 – Système asservi avec une correction proportionnelle de gain k

1. Donner les expressions de l'erreur de position et de l'erreur de traînage en fonction de k.
2. Comment évolue l'erreur de vitesse lorsque k augmente ?
3. Pour une consigne de type rampe unitaire ($R(p) = \frac{1}{p^2}$), quelle valeur doit prendre le correcteur pour que l'asservissement ait une erreur de vitesse de 0.2 ?
4. Discuter de la stabilité de l'asservissement pour cette valeur de k.

2.2.5 Analyse des performances dynamiques d'un asservissement par le lieu des racines (*root locus*)

Soit l'asservissement de la figure 2.11.

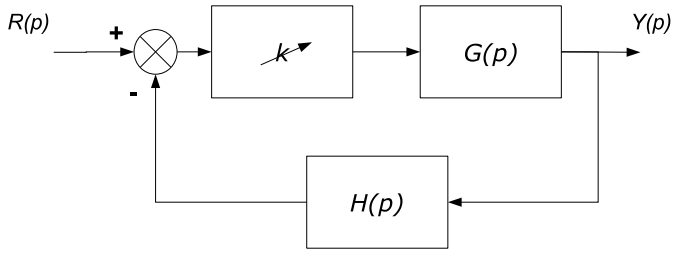


FIGURE 2.11 – Système asservi avec une correction proportionnelle de gain k

Le **lieu des racines** (appelé également lieu d'Evans) est le nom donné au tracé, dans le plan complexe, de l'évolution des **pôles de la boucle fermée** en fonction d'un gain k variant de 0 à $+\infty$.

Les pôles de la fonction de transfert en boucle fermée sont les racines de l'équation caractéristique :

$$1 + kT(p) = 0$$

où $T(p) = G(p)H(p)$ est la fonction de transfert en **boucle ouverte** lorsque $k = 1$.

Le lieu des racines est une représentation graphique de l'équation caractéristique ; il décrit donc l'égalité $kT(p) = -1$ pour toutes les valeurs de k c'est à dire que le lieu doit respecter :

- la condition des modules $|kT(p)| = 1$;
- et la condition des angles $\arg\{kT(p)\} = \pi \ mod \ 2\pi$.

Les règles de construction du lieu ne sont pas données ici [2] ; dans notre cas, nous nous servons d'outils informatiques mis à notre disposition (Matlab, ...), il faut cependant savoir valider et interpréter les résultats qu'ils nous renvoient.

Afin de savoir appréhender un lieu des racines tracé par Matlab, on donne ici la règle des points de départ ($k \to 0$) et d'arrivée ($k \to \infty$). En posant $T(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$ on a :

<u>pour $k \to 0$:</u> $\quad 1 + k\frac{N(p)}{D(p)} = 0 \quad \Longrightarrow \quad D(p) = 0$
les points de départ sont les pôles de la **boucle ouverte** ;

<u>pour $k \to +\infty$:</u> $\quad 1 + k\frac{N(p)}{D(p)} = 0 \quad \Longrightarrow \quad N(p) = 0$
les points d'arrivée sont les zéros de la **boucle ouverte** + *directions asymptotiques* (le nombre de directions assymptotiques égale la différence entre le nombre de pôles et le nombre de zéros de la boucle ouverte).

2. On peut trouver ces règles dans certains ouvrages ; citons le livre *Feedback control of dynamics systems* – Gene F. Franklin, J. David Powell, Abbas Emami-Naeini (Addison-Wesley Publishing Company) dans lequel un chapitre est dédié à la technique du lieu

Cas du TD CSLC N°1 (question II.2)

Nous avons :

$$G(p) \;=\; G_1(p) \times G_3(p) \;=\; \frac{4}{(1+600p)(1+1200p)} \qquad \text{et} \qquad H(p) = K_t = 0,15$$

Le lieu des racines correspondant – obtenu sous Matlab avec la commande *rlocus(T)* où $T(p) = G(p)H(p)$ – est donné sur la figure 3.11. En faire l'analyse.

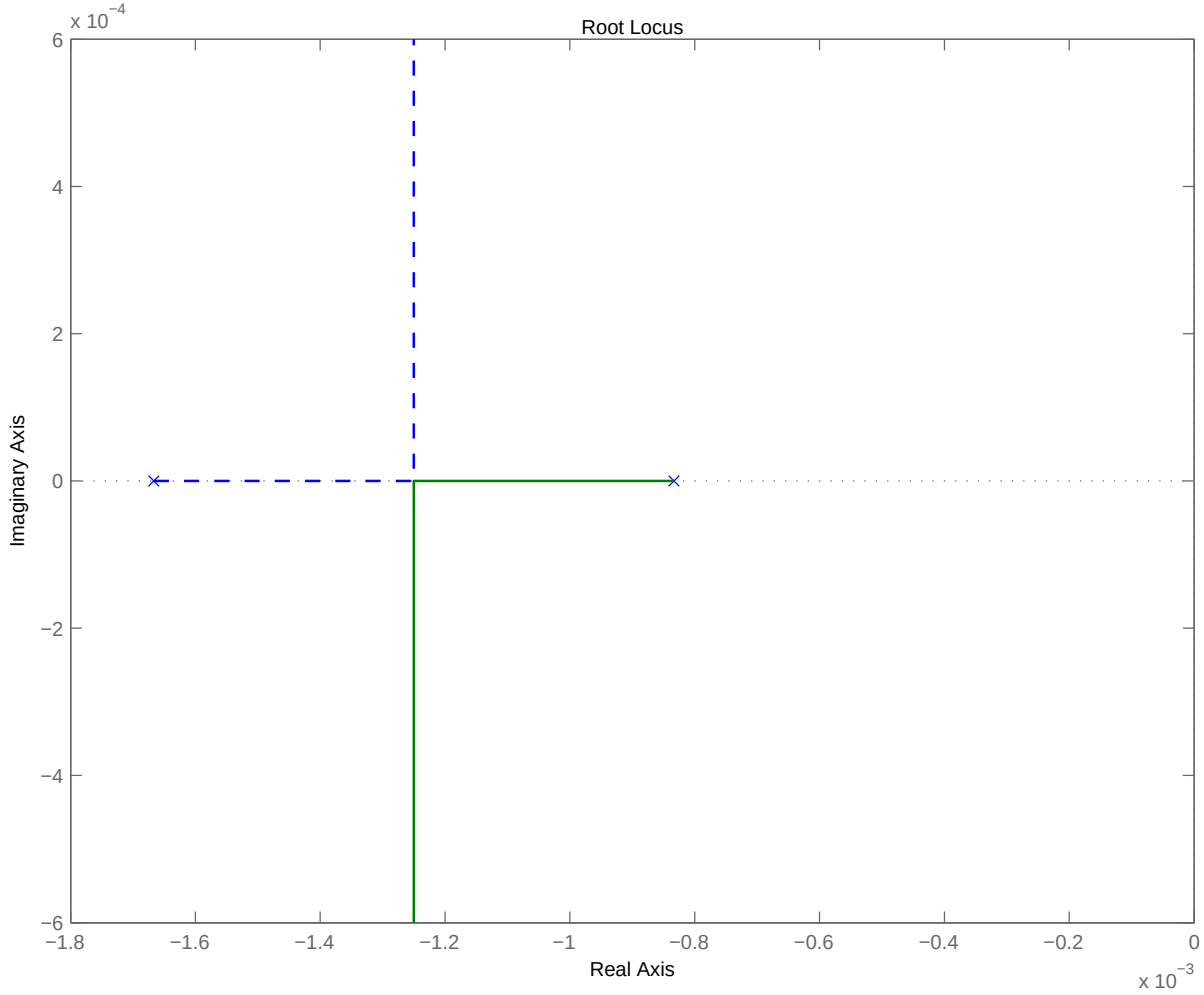


FIGURE 2.12 – Lieu des racines pour $G(p) = \frac{4}{(1+600p)(1+1200p)}$ et $H(p) = 0,15$

Cas du cours

$$G(p) = \frac{1}{p(p+1)(p+2)} \qquad \text{et} \qquad H(p) = 1$$

Le lieu des racines correspondant est donné sur la figure 2.13. En faire l'analyse.

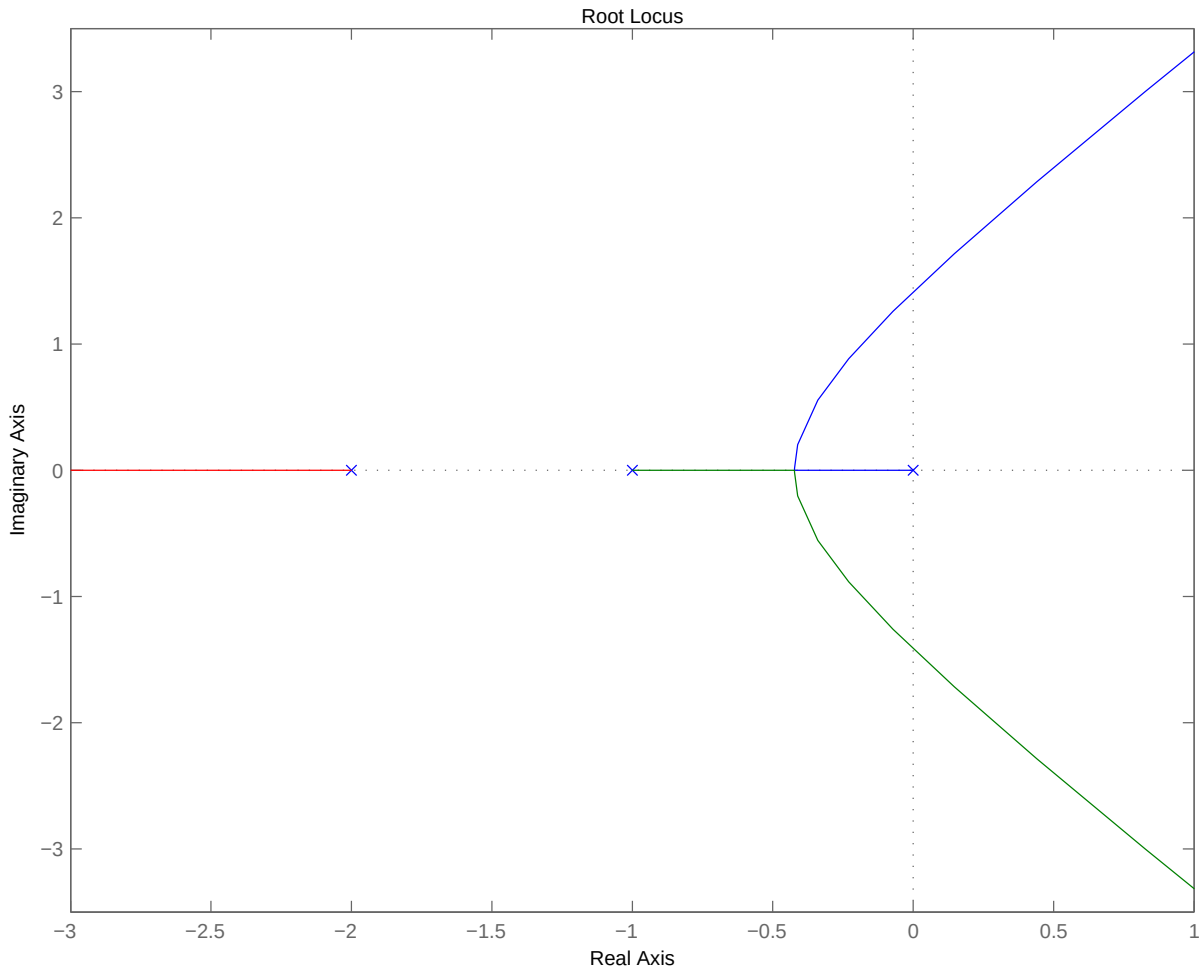


FIGURE 2.13 – Lieu des racines pour $G(p) = \frac{1}{p(p+1)(p+2)}$ et $H(p) = 1$

Chapitre 3

Synthèse de correcteurs

3.1 La régulation *tout ou rien*

▷ Définition

Un régulateur *tout ou rien* génère une commande discontinue pouvant prendre deux valeurs ou deux états : *on/off*, *0 ou 1*, *0 ou 100%*, $-U_{max}$ ou $+U_{max}\ldots$

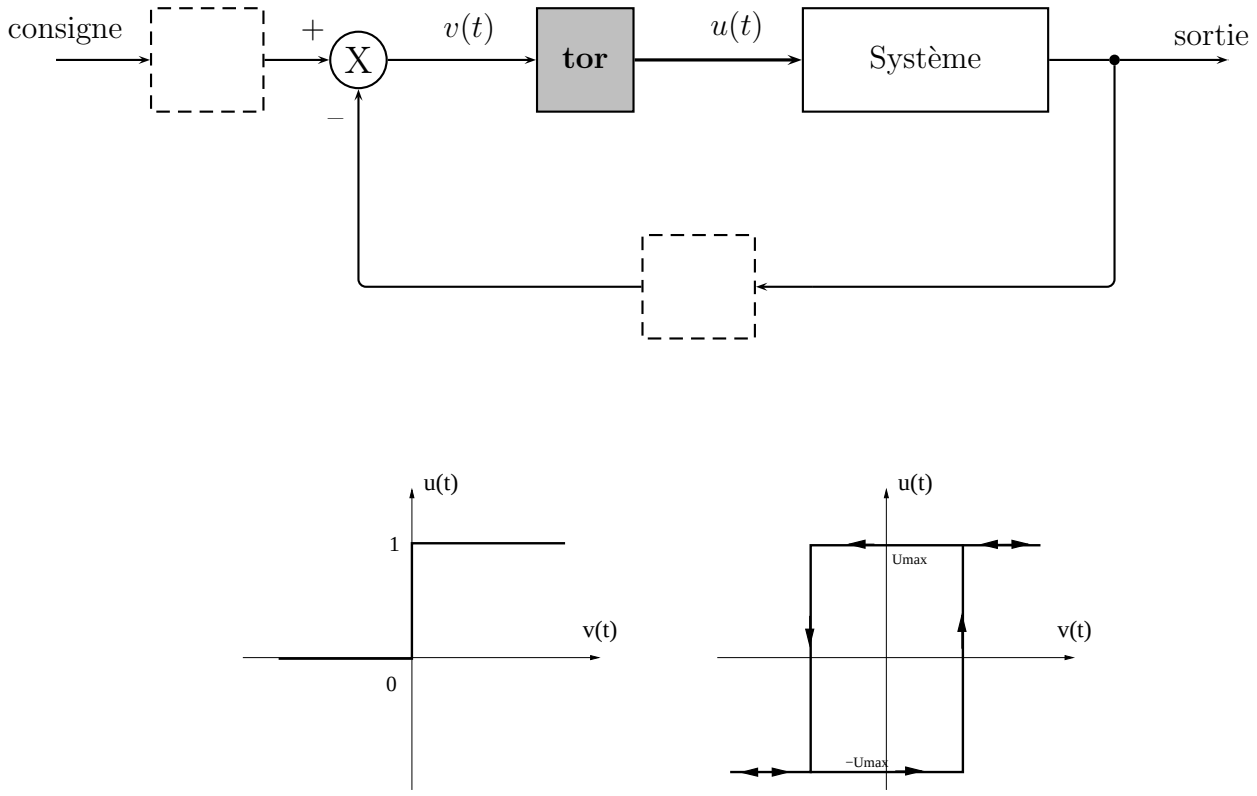


FIGURE 3.1 – Exemple de régulateurs *tout ou rien* – sans hystérésis à gauche – avec hystérésis à droite

▷ Domaine d'utilisation et fonctionnement

Les régulateurs *tout ou rien* sont utilisé pour la commande des systèmes ayant généralement une grande inertie et pour lesquels la précision n'est pas fondamentale ; *e.g.* la régulation

d'un four équipé d'un thermostat à l'aide d'une résistance chauffante.

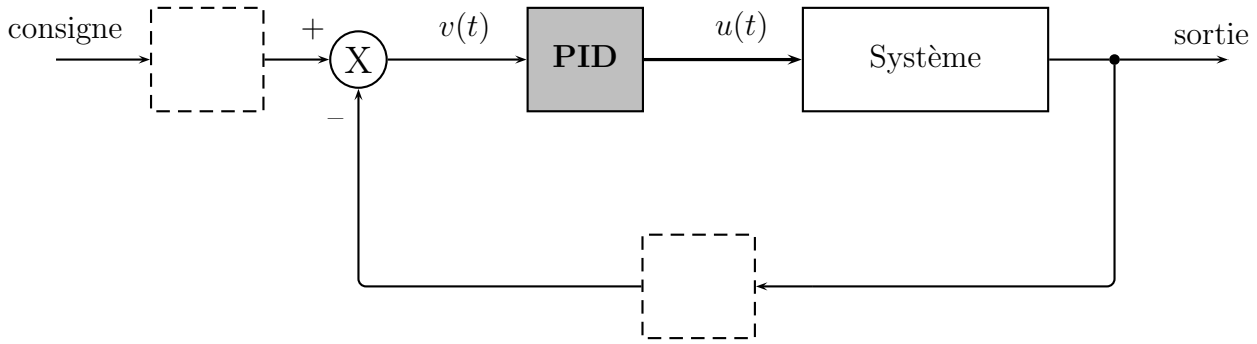
Le régulateur, selon l'application et le résultat escompté peut contenir ou ne pas contenir d'hystérésis. Ajouter de l'hystérésis ou l'augmenter permet d'augmenter un peu le degré de stabilité (eviter le phénomène de *pompage* au sens rapidité de commutation) au détriment de l'erreur statique.
Le fonctionnement d'un régulateur *tout ou rien* sans hystérésis est donné sur la figure 3.2.

FIGURE 3.2 – Régulateur *tout ou rien* sans hystérésis

Pour le même système, le fonctionnement d'un régulateur *tout ou rien* avec une hystérésis est donné sur la figure 3.3.

FIGURE 3.3 – Régulateur *tout ou rien* avec hystérésis

3.2 La correction *PID*



Faire la synthèse d'un P.I.D. est une méthode de correction utilisant explicitement le signal d'erreur $v(t)$ [action P] et/ou son intégrale [action I] et/ou sa dérivée [action D].
Le sens physique de chaque composante P, I et D est clairement établi.

▷ **Modèle temporel *standard***

$$u(t) \;=\; K\left\{v(t) \;+\; \frac{1}{T_i}\int v(t)dt \;+\; T_d\dot{v}(t)\right\}$$

avec

K : gain proportionnel – fonction de transfert correspondante : K ;

T_i : facteur d'intégration – fonction de transfert correspondante : $\frac{1}{T_i p}$;

T_d : facteur de dérivation – fonction de transfert correspondante : $T_d p$.

Le modèle *schéma-bloc* correspondant directement à l'équation ci-dessus avec le jeu de paramètres (K, T_i, T_d) est représenté sur la figure 3.4 ; cette structure est une des plus répandues pour les correcteurs électroniques et numériques, il s'agit du modèle dit *mixte* (mixte par rapport aux deux modèles présentés dans le pragraphe suivant : modèle série et modèle parallèle).

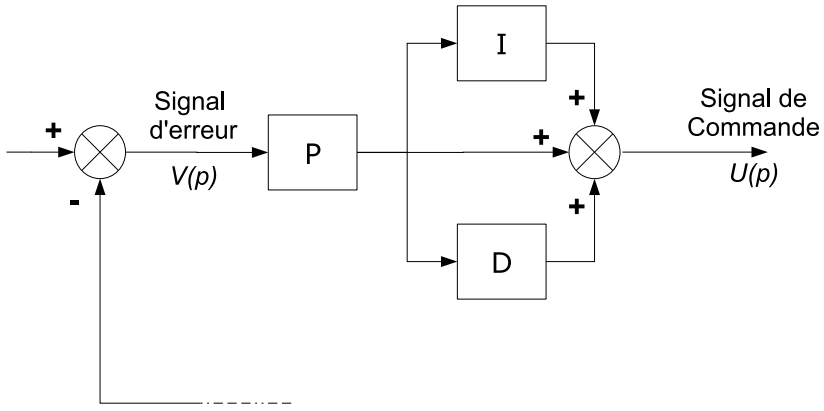


FIGURE 3.4 – Modèle du P.I.D. mixte

Suivant les caractéristiques et les performances désirées sur notre système asservi, on choisira :

– une régulation Proportionnelle [P.] :

$$u(t) \;=\; K\, v(t)$$

– une régulation Proportionnelle – Intégrale [P.I.] :

$$u(t) \;=\; K \left\{ v(t) \;+\; \frac{1}{T_i} \int v(t)dt \right\}$$

– une régulation Proportionnelle – Dérivée [P.D.] :

$$u(t) \;=\; K\, \{v(t) \;+\; T_d \dot{v}(t)\}$$

– ou une régulation Proportionnelle – Intégrale – Dérivée [P.I.D.] dont l'équation est donnée ci-dessus.

▷ Autres modèles de P.I.D.

Dans le cas du modèle parallèle (figure 3.5), la loi de commande, pour le jeu de paramètres (κ, τ_i, τ_d), s'écrit :

$$u(t) \;=\; \kappa v(t) \;+\; \frac{1}{\tau_i} \int v(t)dt \;+\; \tau_d \dot{v}(t)$$

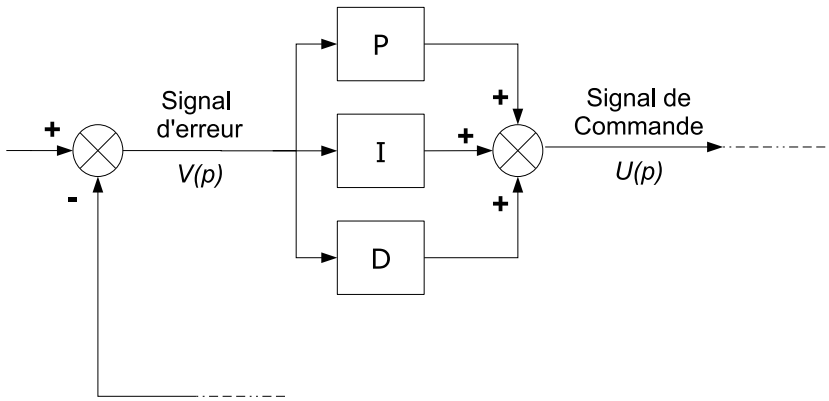


FIGURE 3.5 – Modèle du P.I.D. parallèle

Dans le cas du modèle série (figure 3.6), la loi de commande, pour le jeu de paramètres $(\gamma, \Lambda_i, \Lambda_d)$, s'écrit :

$$u(t) \;=\; \gamma \left\{ \frac{\Lambda_i + \Lambda_d}{\Lambda_i}\, v(t) \;+\; \frac{1}{\Lambda_i} \int v(t)dt \;+\; \Lambda_d\, \dot{v}(t) \right\}$$

N.B. Il est toujours possible de passer d'un jeu de paramètres à un autre ; il est par exemple possible de faire la synthèse d'un certain modèle de correcteur P.I.D. (mixte, série ou parallèle) et de le mettre en œuvre sous une autre forme en faisant le calcul de passage.

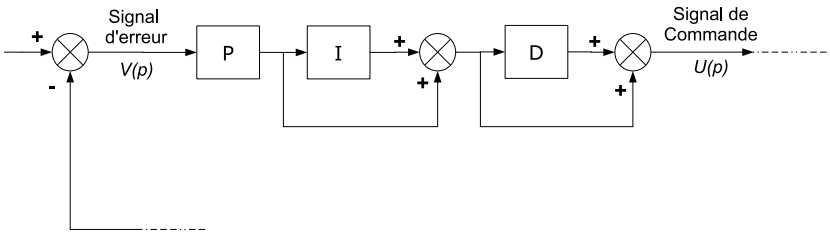


FIGURE 3.6 – Modèle du P.I.D. série

▷ **Justification physique**

- action P : rebouclage élémentaire (correction proportionnelle). Le paramètre K permet d'améliorer la précision et la raideur de l'asservissement. Cependant l'action proportionnelle dégrade généralement le degré de stabilité ;
- action I : pour une précision infinie sur le signal d'erreur. L'action I rend toutefois la réponse plus progressive ;
- action D : action anticipative (accélération de la réponse). Cette action permet d'améliorer le degré de stabilité. La composante dérivée peut entraîner une amplification du bruit sur les signaux bruités et donc dégrader les performances.

N.B. | Les régulateurs (correcteurs) PID sont encore la majorité des régulateurs industriels en raison de leur simplicité de mise en œuvre.

3.3 Quelques méthodes de réglages empiriques

3.3.1 Méthode des réglages successifs

Cette méthode est basée sur l'analyse de la réponse indicielle de l'asservissement.

1. réglage P : $D(p) = K$ ($T_i \to \infty$, $T_d = 0$)

   $K \nearrow K^\star$ jusqu'à l'amorce de *déstabilisation* (pompage) ;

2. réglage I : $D(p) \begin{cases} K = 0.8\,K^\star \\ T_d = 0 \end{cases}$ ($\equiv$ P.I.)

   $T_i \searrow T_i^\star$ jusqu'à une atténuation suffisamment *rapide* du signal d'erreur (*e.g.* pour 4 ou 5 fois le temps du premeir dépassement) ;

3. réglage D : $D(p) \begin{cases} K = 0.8\,K^\star \\ T_i = 1.2\,T_i^\star \end{cases}$ ($\equiv$ P.I.D.)

   $T_d \nearrow T_d^\star$ jusqu'à une atténuation suffisante des oscillations c'est à dire que le signalm de sortie $y(t)$ soit jugé *satisfaisant* (veiller à ne pas trop *accélérer* et déstabiliser le procédé).

Les trois phases de réglages du P.I.D. sont représentées sur la figure 3.7.

3.3.2 Méthode de Ziegler–Nichols

A partir des relevés des paramètres critiques k_{crit} et T_{crit} d'une correction proportionnelle pour laquelle on a cherché le phénomène de *pompage* – illustration figure 3.8 – on peut obtenir, à partir d'une table les paramètres d'un P, d'un PI ou d'un PID. Le correcteur

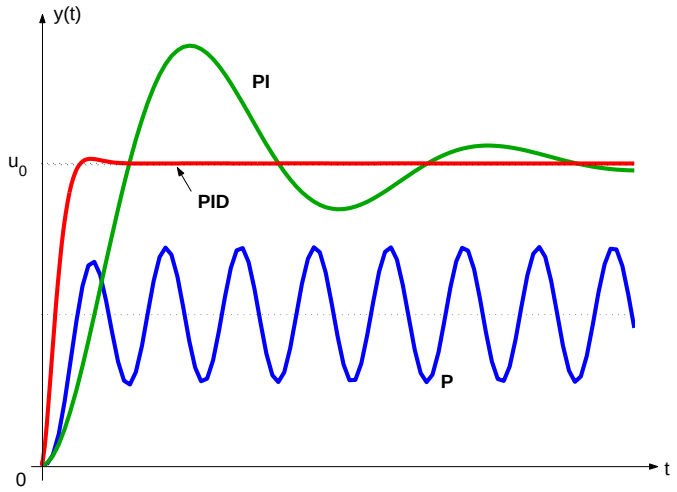


FIGURE 3.7 – Réglage d'un PID

(généralement peu satisfaisant) ainsi obtenu nécessite généralement certains réglages plus fins.

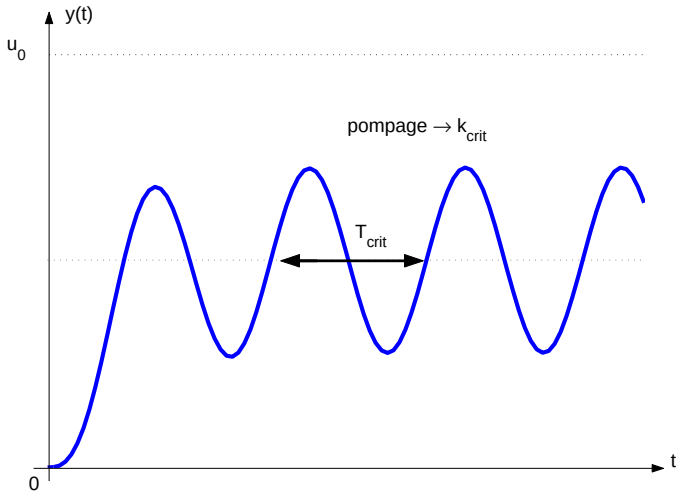


FIGURE 3.8 – Lecture des paramètres critiques pour la méthode de Ziegler-Nichols

Le tableau en question est le suivant (seul les paramètres pour le cas du P.I.D. mixte sont donnés ici) :

	K	T_i	T_d
P	$\frac{k_{crit}}{2}$	∞	0
PI	$\frac{k_{crit}}{1.2}$	$\frac{T_{crit}}{1.2}$	0
PID	$0.6\,k_{crit}$	$\frac{T_{crit}}{2}$	$\frac{T_{crit}}{8}$

3.4 Synthèse fréquentielle d'un P.I.D.

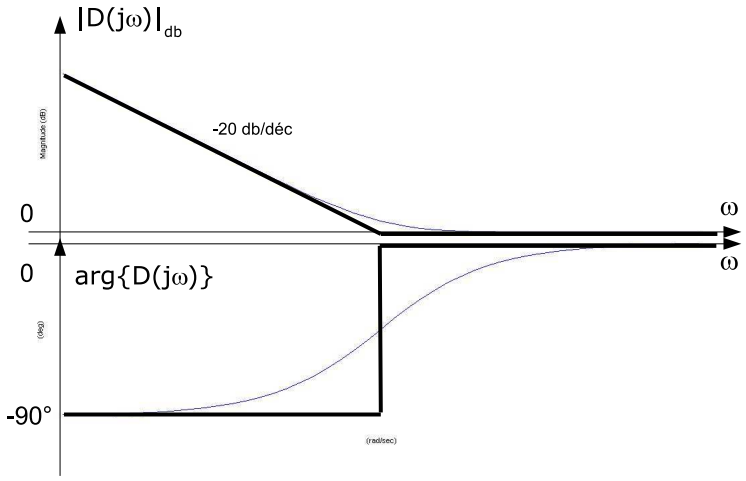
3.4.1 Analyse fréquentielle des différentes actions

▷ **Action P. :** $D(p) = K$

(+) aux basses fréquences → amélioration de la précision ;

(-) aux *hautes fréquences* → dégrade la M_ϕ.

▷ **Action P.I. (cas particulier où $K = 1$) :** $D(p) = \frac{1}{T_i p}(1 + T_i p)$



(+) gain ∞ aux basses fréquences → précision ∞ ;

(-) déphasage de -90° aux basses fréquences → *bon* seulement si $\frac{1}{T_i} \ll \omega_{0db}$ pour ne pas dégrader la M_ϕ ;

(-) cependant T_i ne doit pas être trop grand ($\frac{1}{T_i} \to 0$) car la réponse sera ralentie, ramollie, ...

▷ **Action P.D. (cas particulier où $K = 1$) :** $D(p) = 1 + T_d p$

(-) gain ∞ aux hautes fréquences → amplification des bruits ;

(+) amène un surplus de phase → degré de stabilité amélioré !

▷ **Action P.I.D. :** $D(p) = K(1 + \frac{1}{T_i p})(1 + T_d p)$

(+) action I aux basses fréquences → précision ;

(+) action D aux fréquences élevées → apport de phase et réglage de M_ϕ.

Ex. | Montrer que la forme $D(p) = K(1+\frac{1}{T_i p})(1+T_d p)$ correspond à celle du P.I.D. série.

3.4.2 Illustrations (à partir d'un exemple traité en T.D.)

L'illustration est basée sur la synthèse du correcteur $D(p)$ pour l'asservissement de la figure 3.9 pour lequel on a $K_t = 0.15$ et

$$G(p) = \frac{4}{(1 + 600p)(1 + 1200p)}$$

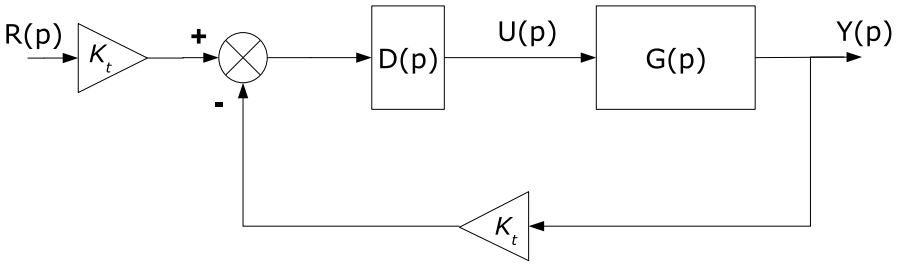
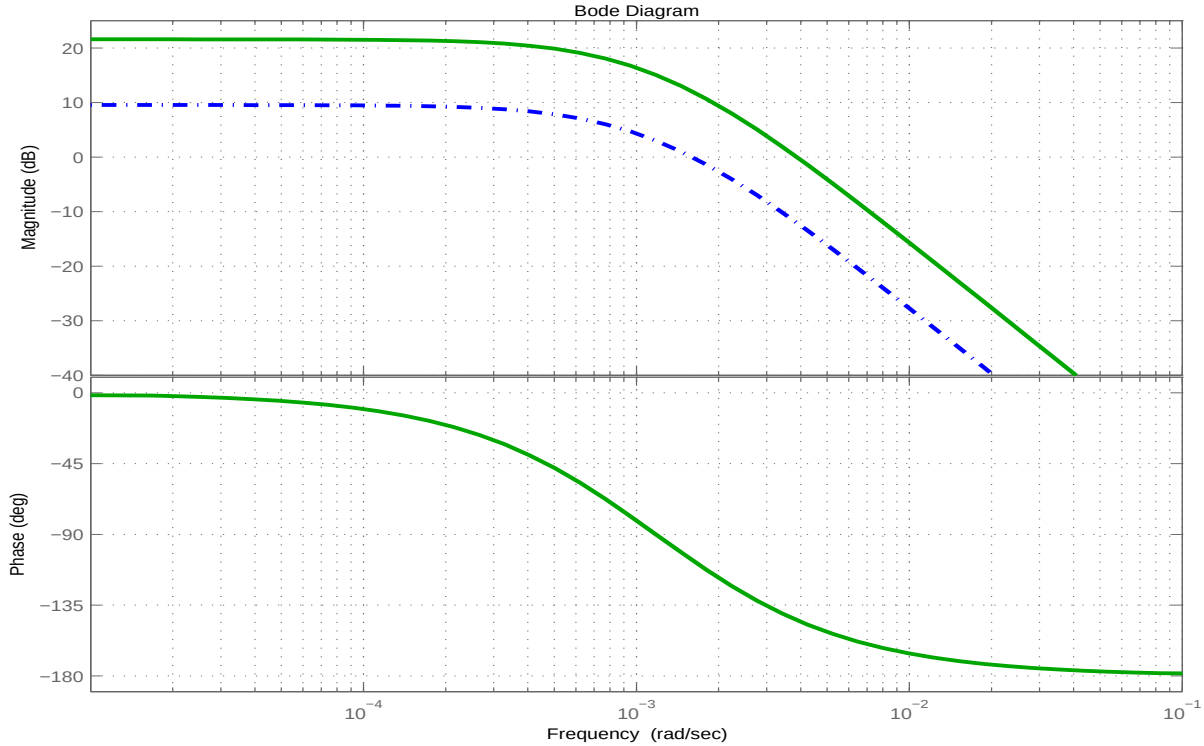
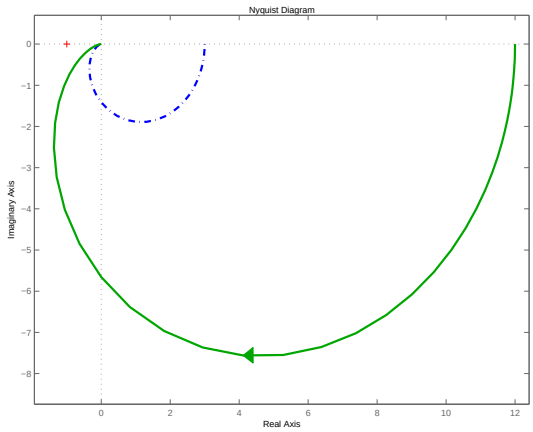
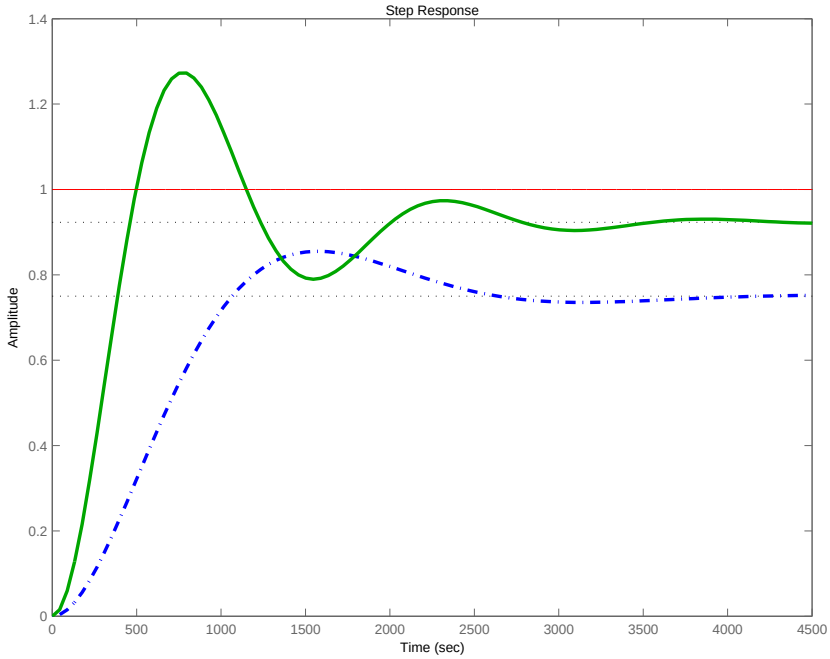


FIGURE 3.9 – Schéma bloc de l'asservissement

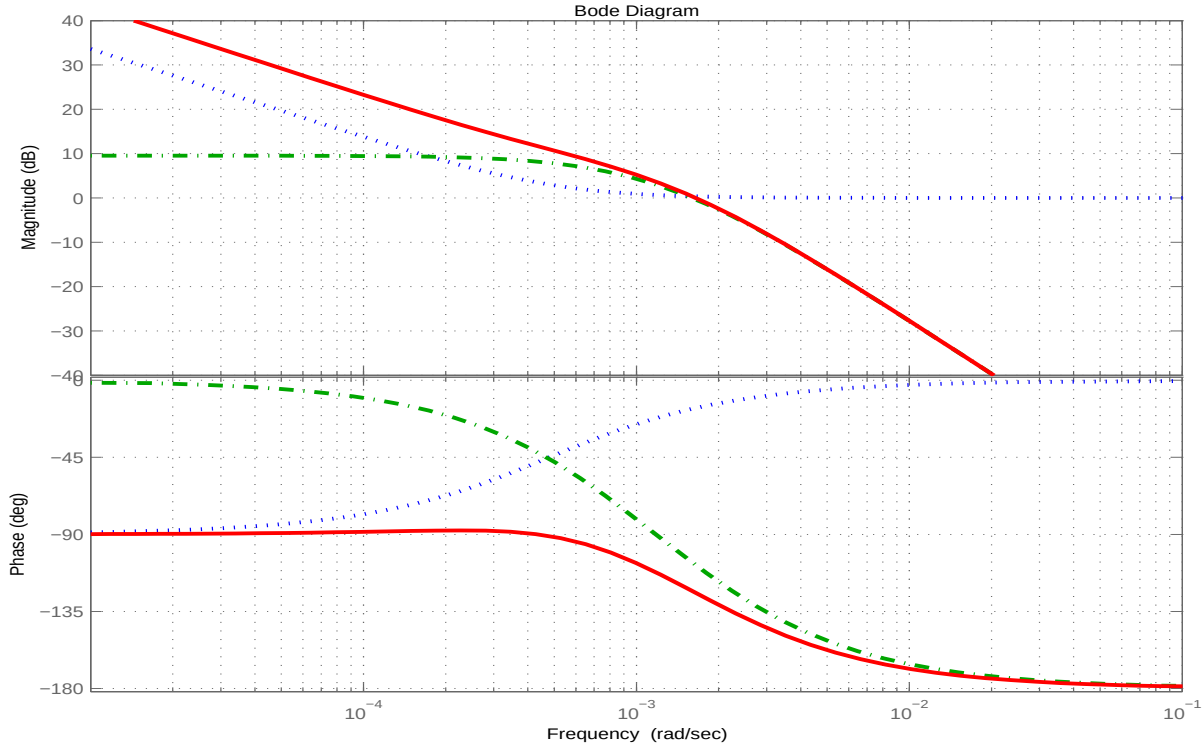
Action P.

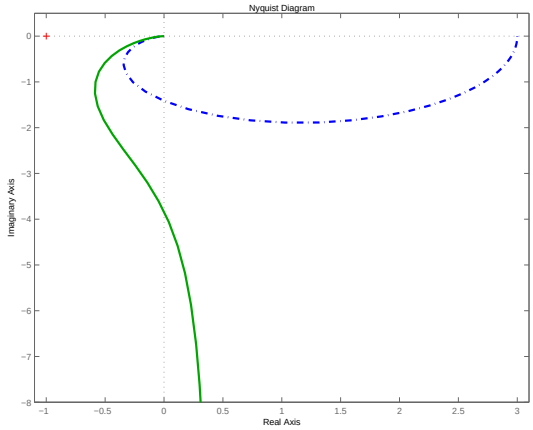

Bode Diagram
Magnitude (dB)
Phase (deg)
Frequency (rad/sec)

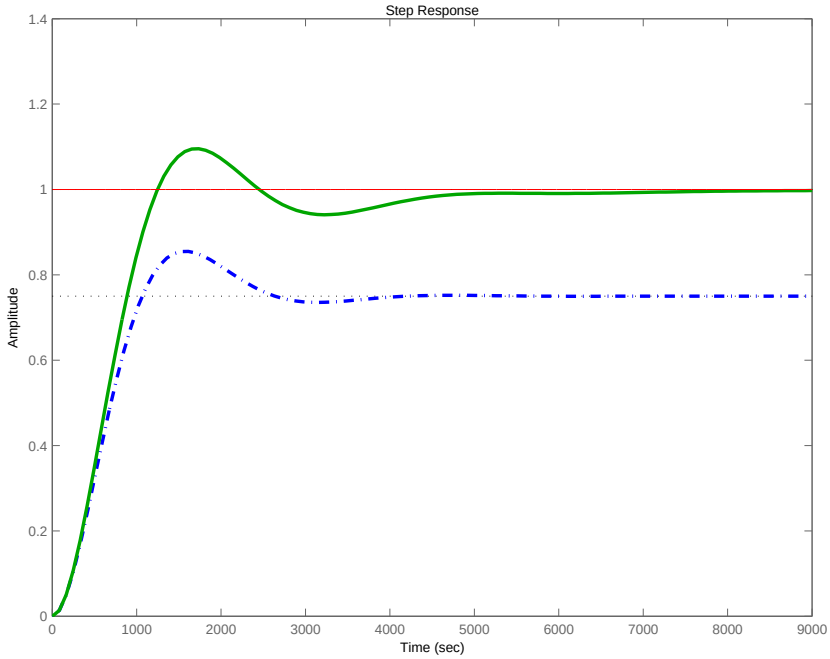

Nyquist Diagram
Imaginary Axis
Real Axis


Step Response
Amplitude
Time (sec)

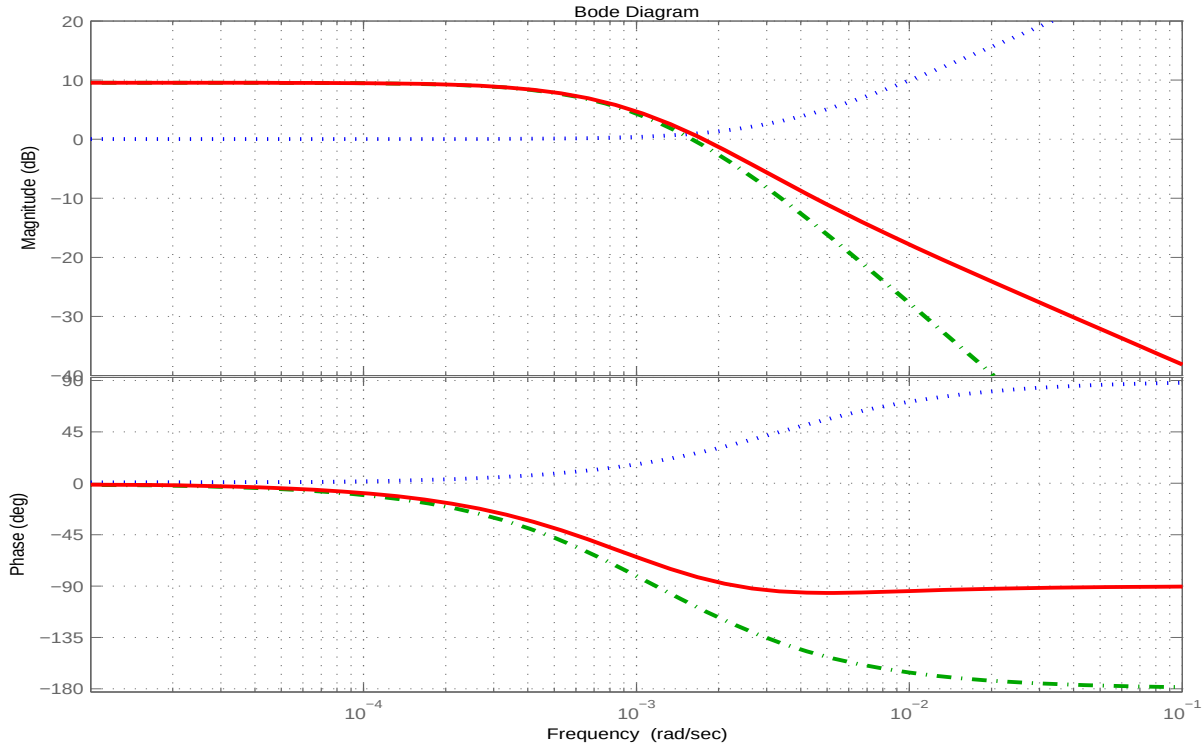
Action P.I.

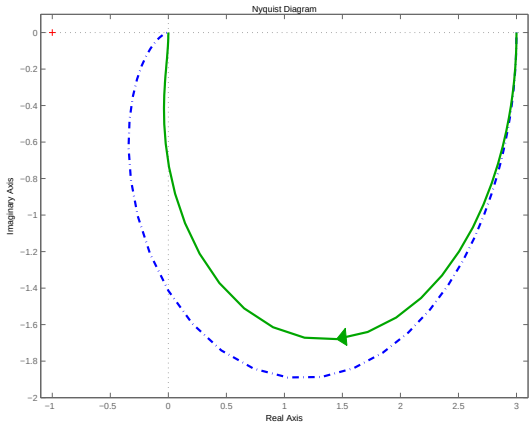

Bode Diagram
Magnitude (dB)
Phase (deg)
Frequency (rad/sec)

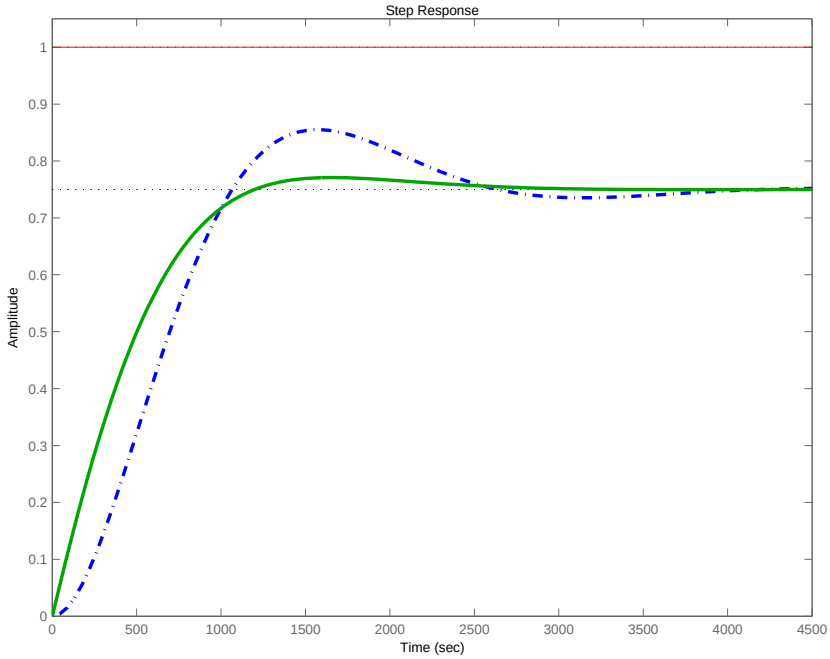

Nyquist Diagram
Imaginary Axis
Real Axis


Step Response
Amplitude
Time (sec)

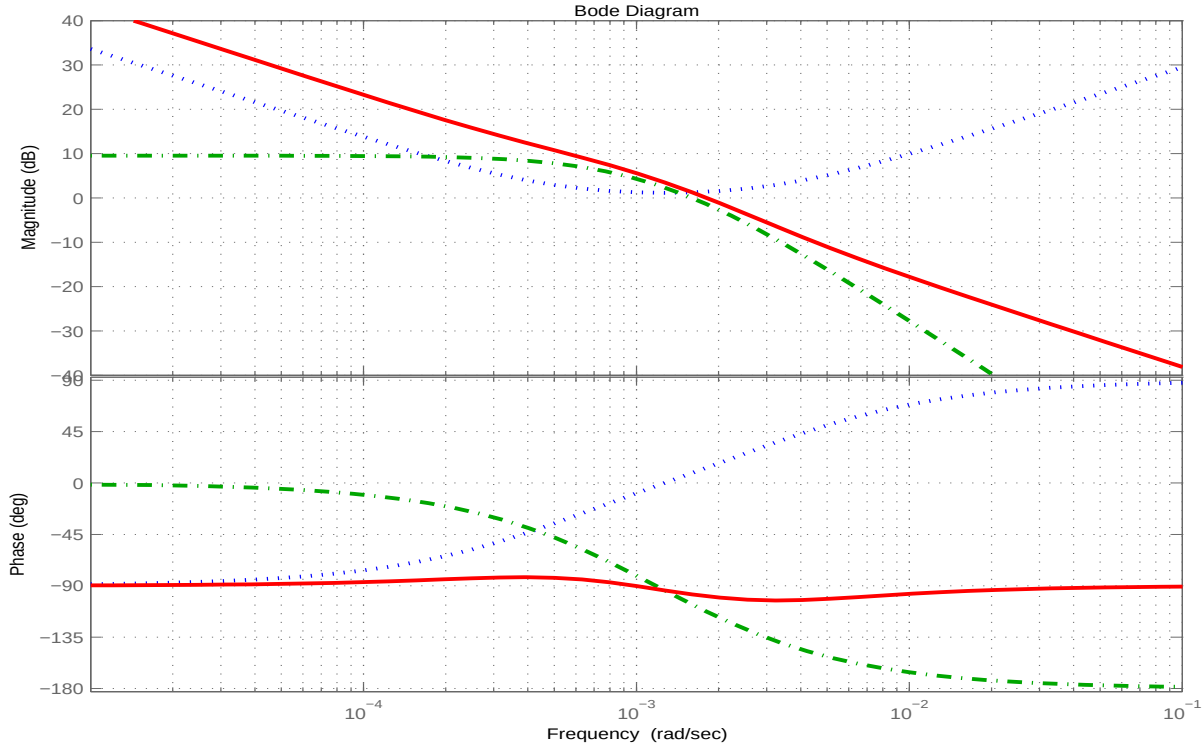
Action P.D.

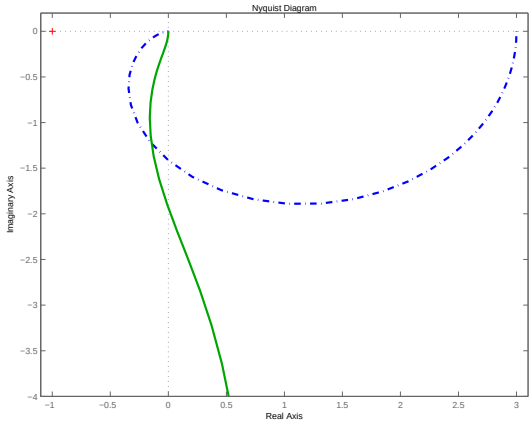

Bode Diagram
Magnitude (dB)
Phase (deg)
Frequency (rad/sec)

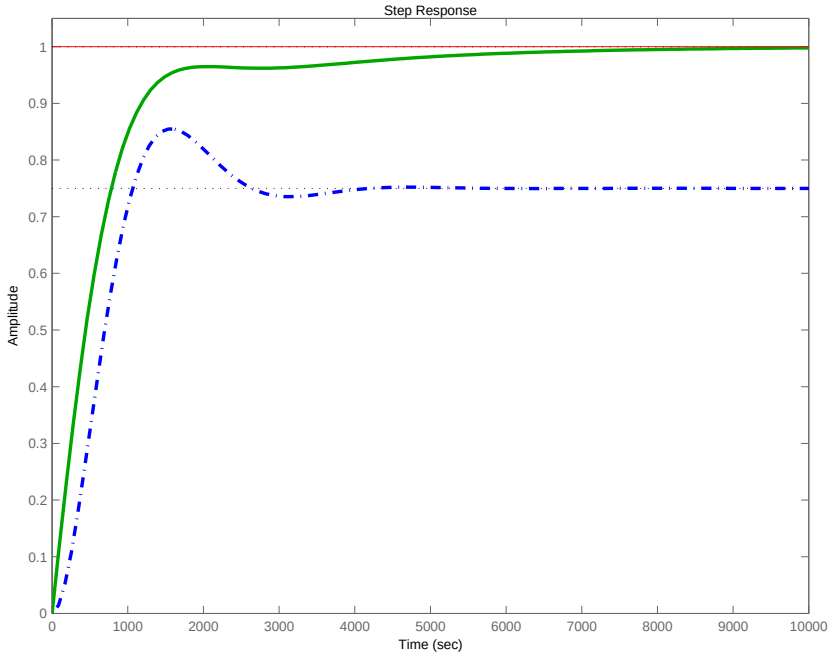

Nyquist Diagram
Imaginary Axis
Real Axis


Step Response
Amplitude
Time (sec)

Action P.I.D.


Bode Diagram
Magnitude (dB)
Phase (deg)
Frequency (rad/sec)


Nyquist Diagram
Imaginary Axis
Real Axis


Step Response
Amplitude
Time (sec)

3.4.3 Exemple d'algorithme de réglage

Cet algorithme, qui n'est pas exhaustif, décrit la séquence des calculs à réaliser pour *placer* les 3 paramètres (K, T_i et T_d) d'un correcteur PID.

Le correcteur est ici de la forme :

$$D(p) = \frac{K}{T_i p}(1 + T_i p)(1 + T_d p)$$

Nous faisons l'hypothèse que :

- l'analyse de l'asservissement nous a déjà orienté vers le choix d'une valeur de gain proportionnel que nous notons k. Ce sera par exemple le choix d'un gain k qui confère à l'asservissement une certaine raideur (temps de montée). Le paramètre final K de correction proportionnelle du correcteur PID s'exprimera alors :

  $$K = k \times k_{aj}$$

  où k_{aj}, gain d'ajustement proche de 1, permettra de faire un réglage fin ;
- nous souhaitons améliorer la précision de l'asservissement en annulant une erreur (composante I du PID) ;
- nous souhaitons améliorer le degré de stabilité de l'asservissement c'est à dire augmenter la marge de phase d'une quantité Δ_ϕ (composante D du PID).

Pour réaliser ce travail, on note $T(p)$ **la fonction de transfert en boucle ouverte considérée avec le gain** k et (M_Φ, ω_{0db}) la mesure de la marge de phase opérée sur $T(p)$.

réglage (D)

En supposant que $\frac{1}{T_i} \ll \omega_{0db}$, le correcteur autour de ω_{0db} peut être approché par la fonction $k_{aj}(1 + T_d p)$ soit

$$\begin{cases} |D(j\omega_{0db}| = k_{aj}\sqrt{1 + T_d^2\omega_{0db}^2} \\ \arg\{D(j\omega_{0db})\} = \arctan(T_d\omega_{0db}) \end{cases}$$

On souhaite donc que

$$\arctan(T_d\omega_{0db}) = \Delta_\phi$$
$$\downarrow$$
$$T_d = \frac{\tan\Delta_\phi}{\omega_{0db}}$$

réglage (P)

On règle ensuite k_{aj} de façon à avoir un gain de $0db$ après correction :

$$|D(j\omega_{0db}|\,|T(j\omega_{0db}| = 1$$
$$\Downarrow$$
$$|D(j\omega_{0db}) = 1| \text{ car } |T(j\omega_{0db})| = 1$$

d'où

$$k_{aj} \simeq \frac{1}{\sqrt{1 + T_d^2\omega_{0db}^2}}$$

réglage (I)

T_i est déduit directement en posant :

$$\frac{1}{T_i} = \frac{\omega_{0db}}{10}$$

En pratique T_i est souvent calculé sur cette base ; en plaçant $\frac{1}{T_i}$ une décade en amont de ω_{0db}, on peut montrer que la phase en ω_{0db} est très légèrement dégradée ($\sim 3^o$).

3.5 Exercice *bilan*

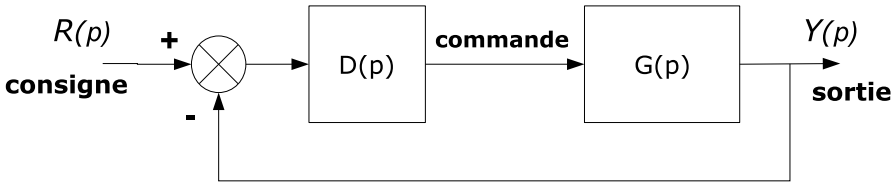


FIGURE 3.10 – Asservissement considéré

On considère l'asservissement de la figure 3.10 pour lequel le modèle fonction de transfert $G(p)$ du système à commander égale :

$$G(p) = \frac{20}{(1 + p)(1 + 0,5p)}$$

Dans un premier temps, le correcteur $D(p) = K$ (correction proportionnelle).

1. Donner l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte $T(p)$ et de la fonction de transfert en boucle fermée $F(p)$.

2. Calculer l'erreur de position et l'erreur de vitesse de l'asservissement en fonction de K.

3. Déterminer la valeur de K_c de K au delà de laquelle les pôles sont complexes conjugués.

   Que peut-pon dire du comportement dynamique temporel dans le cas où $K \leq K_c$ et dans le cas $K > K_c$?

   Dans le cas où $K > K_c$, que peut-on dire de la partie réelle des pôles ? Que peut-on déduire en terme de stabilité du système asservi ?

   Etayer le propos grâce au lieu des racines fig. 3.11.

   Calculer les pôles de l'asservissement pour $K = 0.1$ et $K = 2$; donner le coefficient d'amortissement ξ correspondant à chacune de ces valeurs de K.

Déduire les caractéristiques dynamiques attendues pour $K = 0.1$ et $K = 2$: temps de réponse [1] et premier dépassement [2].

4. Retrouver les caractéristiques dynamiques et les performances en précision des réponses indicielles sur la figure 3.12.

5. La réponse harmonique de la **boucle ouverte** $T(p)$ est reportée sur la figure 3.13. Mesurer les marges de stabilité.
   Retrouver théoriquement la valeur de la marge de phase.

6. Faire la synthèse d'un correcteur P.I.D. qui réponde au cahier des charges suivant :

   – erreur de position nulle ;
   – marge de phase d'au moins 70°.

   Pour cela se servir du canevas de la figure 3.14 en y plaçant K, T_i et T_d.

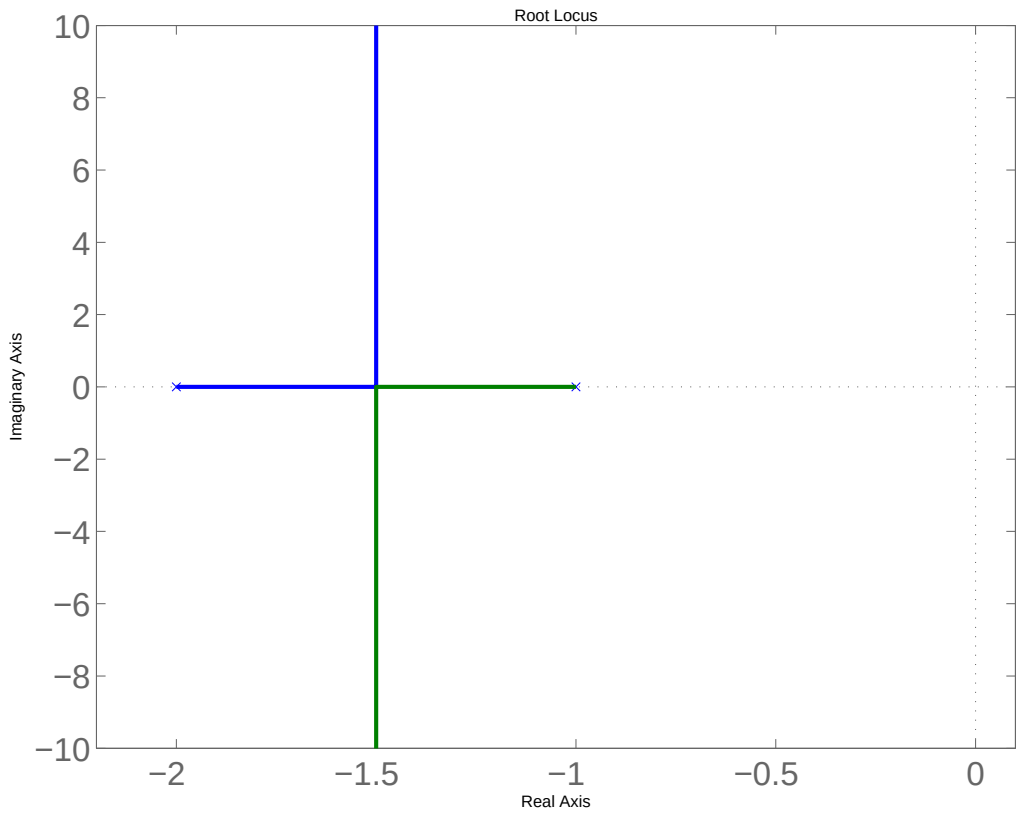


FIGURE 3.11 – Lieu des racines

1. on rappelle que le temps de réponse t_r d'un second ordre dont les pôles sont $p_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} = -\sigma \pm j\omega_p$ est environ égal à $t_r \simeq \frac{3}{\sigma}$
2. on rappelle que le premier dépassement égale $D_1 = \exp\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$

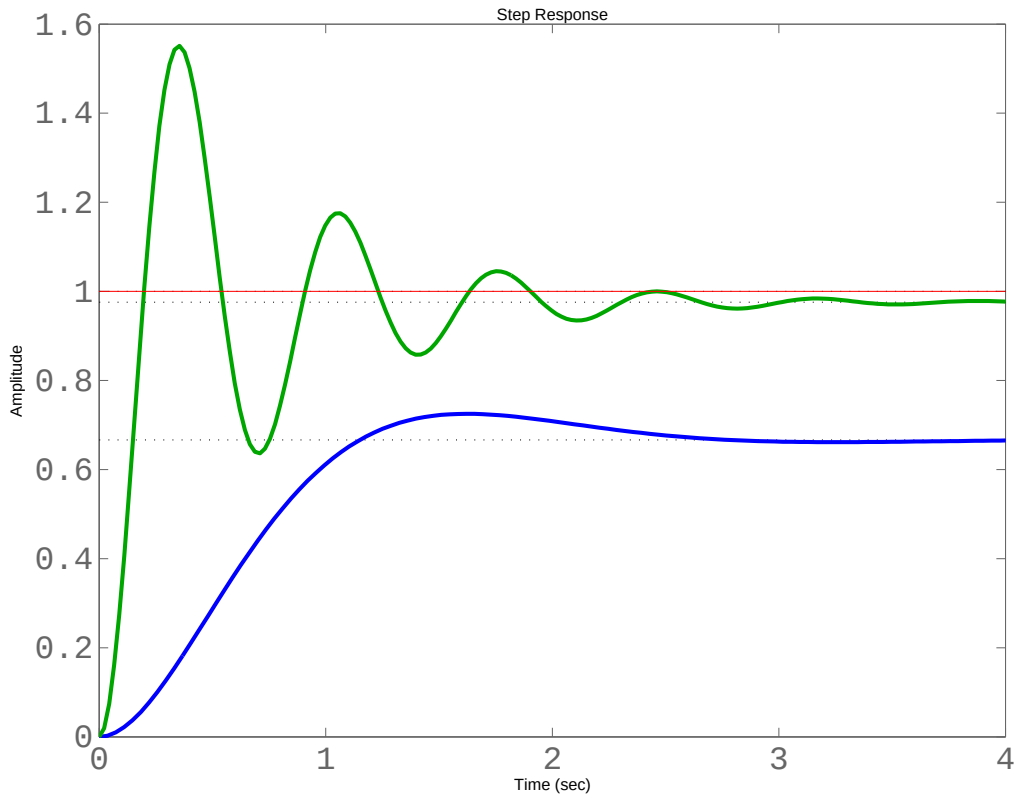
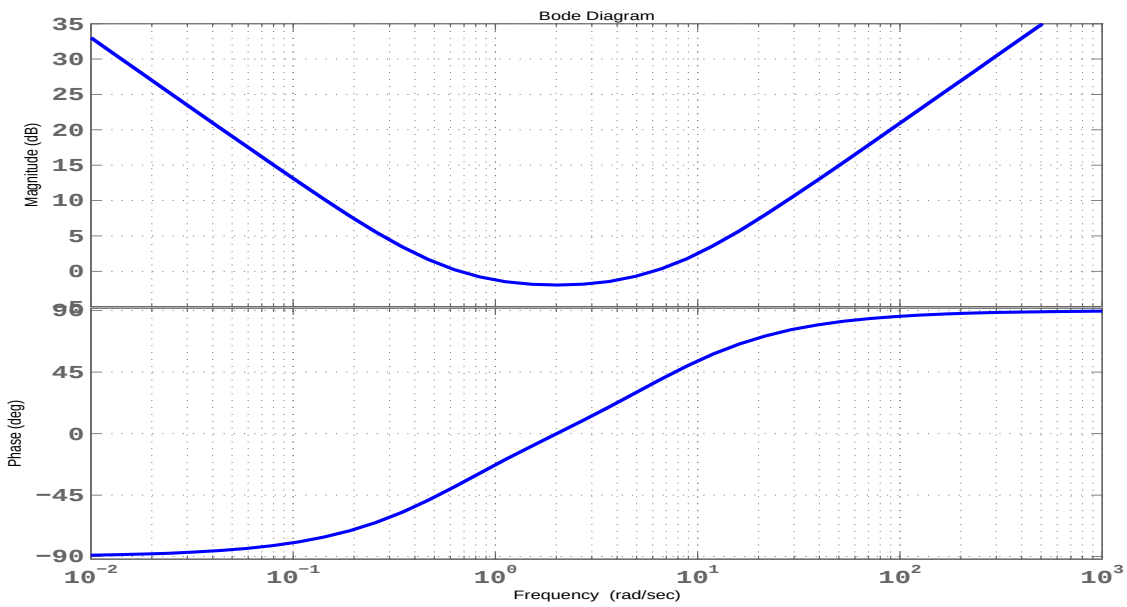


FIGURE 3.12 – Réponse indicielle de l'asservissement pour $K = 0.1$ et $K = 2$



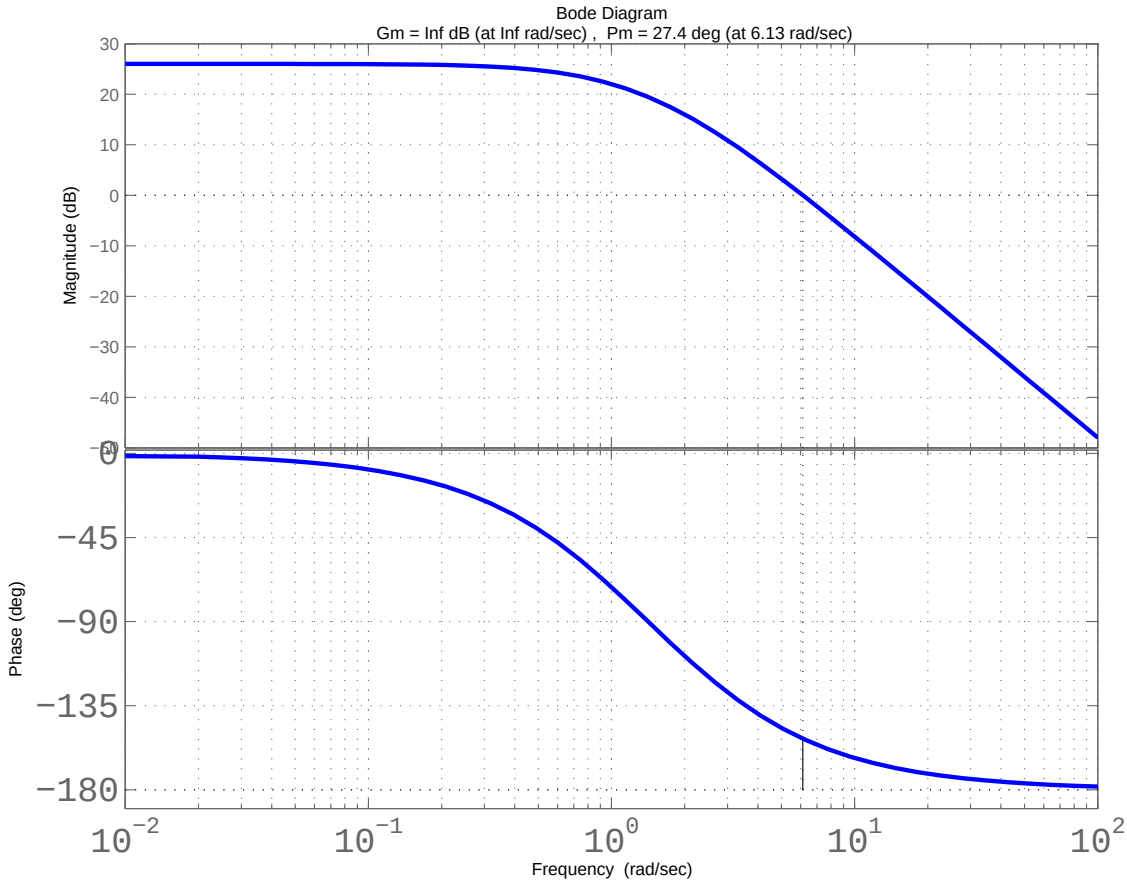


FIGURE 3.13 – Réponse harmonique en boucle ouverte pour $D(p) = 1$

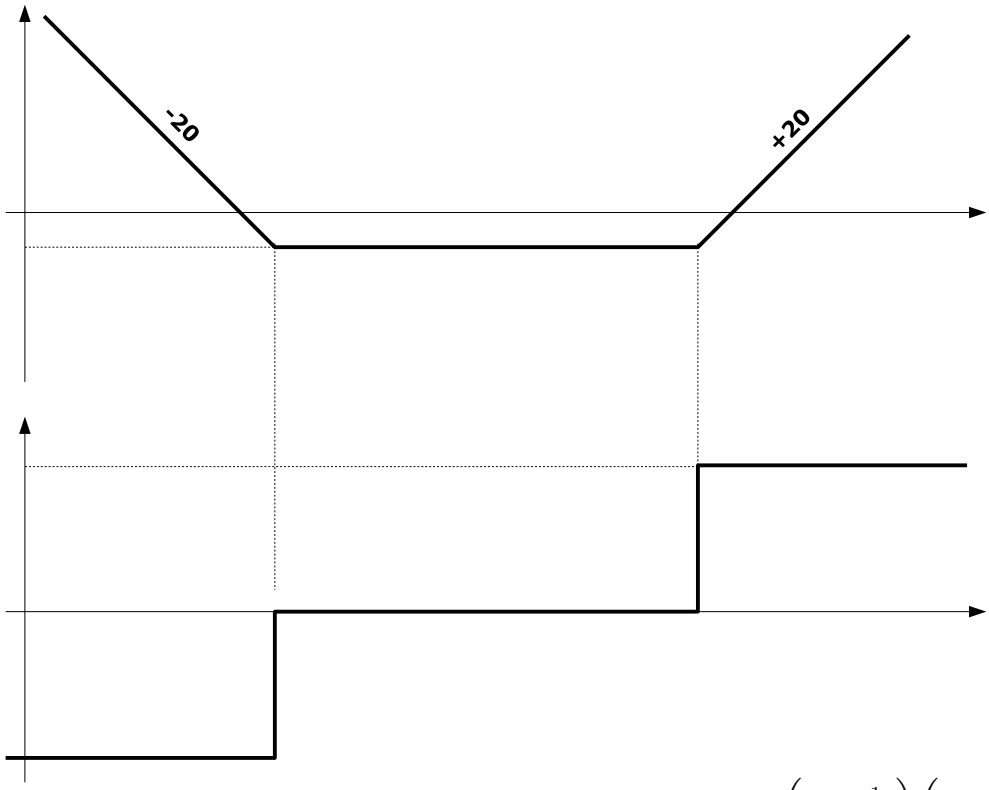
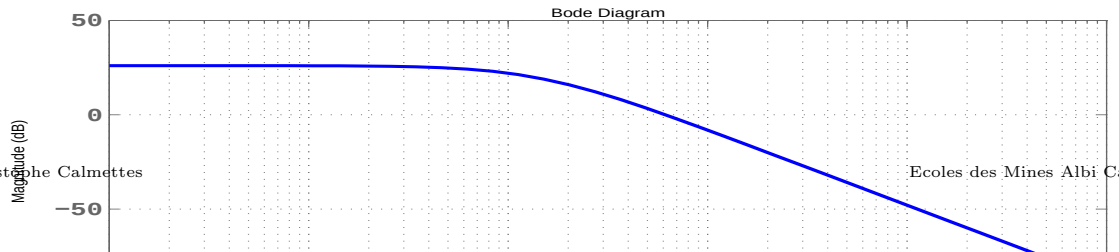
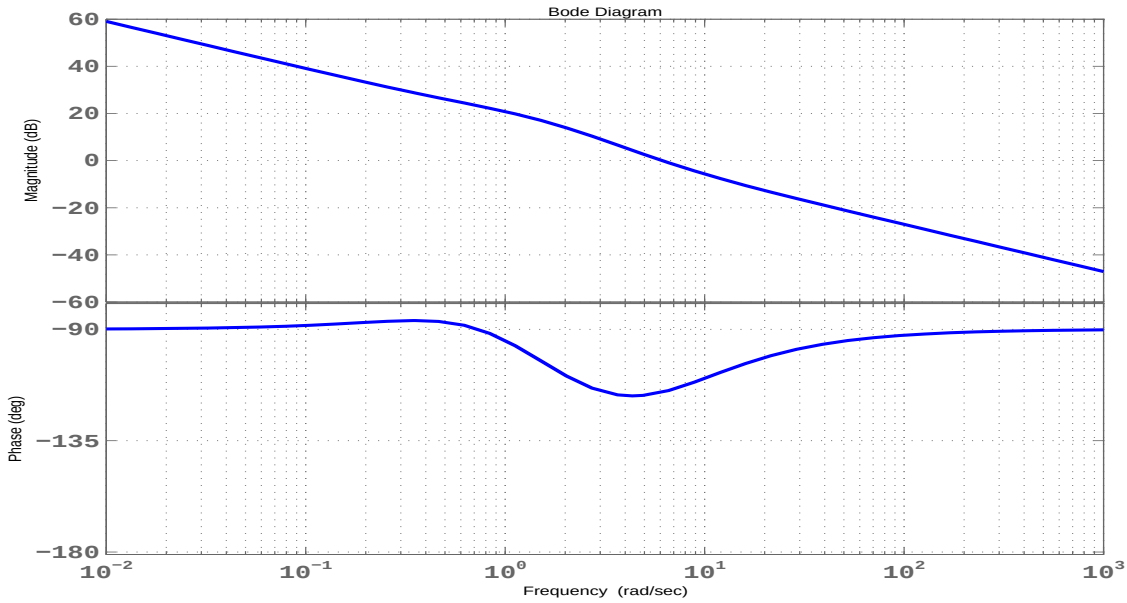
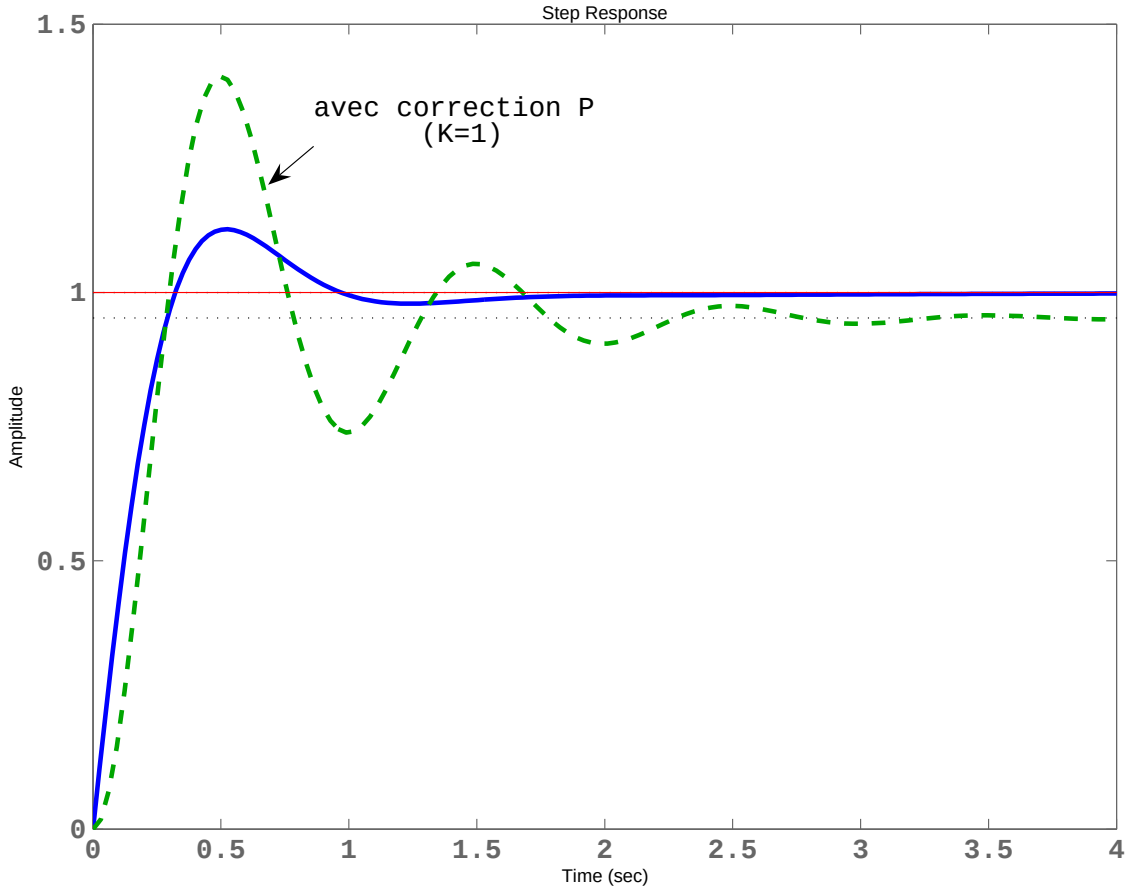


FIGURE 3.14 – Tracé asymptotique du P.I.D. seul : $D(p) = K\left(1 + \frac{1}{T_i p}\right)\left(1 + T_d p\right)$







3.6 Synthèse d'un correcteur avance de phase

L'avance de phase sera largement traité – aspects théorique et mise en œuvre – dans un T.D.

Table des matières

1 Asservissement – Boucle Fermée **9**
1.1 Pourquoi asservir un système ? Comment asservir un système 9
1.2 Schéma-blocs et fonction de transfert en boucle fermée 14
1.3 Performances d'un système asservi 16
1.3.1 L'allure de la réponse d'un système asservi 16
1.3.2 La stabilité 17
1.3.3 La précision 19
1.3.4 La rapidité – temps de réponse 20
1.3.5 La raideur – temps de montée 21

2 Analyse d'un asservissement
Approche fréquentielle **23**
2.1 Caractérisation de la stabilité d'un S.L.I. (Rappel) 23
2.1.1 A partir de l'examen des pôles de la fonction de transfert 23
2.1.2 Critère algébrique de Routh 24
2.2 Stabilité et performance en précision d'un asservissement 26
2.2.1 Notations 26
2.2.2 Analyse de la stabilité d'un asservissement 27
2.2.3 Performances en précision d'un asservissement 31
2.2.4 Illustration du compromis précision / stabilité à partir d'un exemple 33
2.2.5 Analyse des performances dynamiques d'un asservissement par le lieu des racines (*root locus*) 34

3 Synthèse de correcteurs **37**
3.1 La régulation *tout ou rien* 37
3.2 La correction *PID* 39
3.3 Quelques méthodes de réglages empiriques 41
3.3.1 Méthode des réglages successifs 41
3.3.2 Méthode de Ziegler–Nichols 41
3.4 Synthèse fréquentielle d'un P.I.D. 43
3.4.1 Analyse fréquentielle des différentes actions 43
3.4.2 Illustrations (à partir d'un exemple traité en T.D.) 44
3.4.3 Exemple d'algorithme de réglage 49
3.5 Exercice *bilan* 50
3.6 Synthèse d'un correcteur avance de phase 54