Courants dans un plan d'eau et transport d'un polluant.

O. Louisnard et J.J. Letourneau

2 avril 2008

Introduction et présentation générale

Les courants dans les lacs, plans d'eau ou salines, sont couramment étudiés dans divers buts : étude des transports d'oxygène, fondamentaux pour l'écologie sous-marine, la pisciculture ou l'ostréiculture, ou encore étude des transports de polluants, en cas d'activité industrielle émettant des rejets dans l'eau. Les courants peuvent provenir éventuellement de cours d'eau entrants ou sortants du plan d'eau, mais aussi du vent, qui par cisaillement à la surface, produit un champ de vitesse diffusant peu à peu en profondeur. Ces courants sont dans la réalité très complexes, et par essence tridimensionnels. En effet, l'eau étant incompressible, tout courant doit être compensé par un contre-courant, parfois sous-marin. Ils requièrent donc la résolution des équations de Navier-Stokes en 3D, avec en sus un modèle pour prendre en compte la turbulence, et prenant en compte les données bathymétriques (la carte des profondeurs de l'étang) d'une part, et le forçage en surface par le vent d'autre part.

Dans cette étude, on supposera pour simplifier que les courants sont bidimensionnels, dans le plan de la surface du plan d'eau, ce qui veut dire que les courants sont identiques en profondeur et à la surface. La résolution des équations de Navier-Stokes peut être alors évitée en utilisant une fonction de courant ψ, que l'on montre vérifier une équation de Laplace, dans l'hypothèse d'un écoulement irrotationnel, lié au caractère parfait du fluide. Ce modèle simple permet déjà de représenter l'entrée et la sortie d'eau dans l'étang par des fleuves dont on connaît le débit, en imposant des conditions aux limites adéquates sur ψ.

Pour représenter l'action du vent qui superpose un écoulement tourbillonaire à l'écoulement initial, il faut "créer" de la vorticité (le rotationnel de la vitesse) par dessus l'écoulement irrotationnel. L'équation à vérifier devient une équation de Poisson, dont le second membre est un terme source de vorticité, que l'on explicitera de manière à reproduire un effet du vent plus ou moins réaliste.

Une fois connu le champ des vitesses, on peut utiliser ce dernier dans une équation de transport d'un polluant, dont la source est placée à un endroit choisi sur la berge. Ce polluant circule alors vers les sorties, mais peut aussi s'accumuler dans des organismes vivants (typiquement les coquillages), présents dans certaines zones de l'étang.

Enfin, certains des phénomènes précédents peuvent être reliés aux données bathymétriques, pour obtenir un modèle plus fin. Ces dernières, en admettant qu'elles soient connues, sont difficiles à rentrer dans COMSOL. Aussi on pourra imaginer de définir le fond du plan d'eau par une EDP adéquate, et utiliser le résultat pour raffiner les modèles.

1 Calcul de l'écoulement

1.1 Modélisation

1. Rappeler comment un écoulement incompressible plan peut être représenté par une fonction de courant scalaire $\psi(x, y)$.
2. Quelle est l'équation vérifiée par cette fonction pour un écoulement irrotationnel ?
3. Que représentent physiquement les courbes $\psi = C^{te}$?
4. Montrer que le débit volumique entre deux lignes $\psi = \psi_1$ et $\psi = \psi_2$, et par unité de longueur suivant z, est $Q = \psi_2 - \psi_1$. Trouvez la convention de signe pour le sens de l'écoulement.
5. Ecrire la fonction de courant pour un écoulement unidirectionnel uniforme de vitesse U_0.
6. Dessiner (grossièrement) un lac avec une entrée (au moins), une sortie (au moins), éventuellement une ou plusieurs îles. On notera Q_0 le débit volumique traversant le lac. Ecrire *sur le papier* les conditions sur toutes les frontières de votre lac. *Attention : cette phase est primordiale pour la suite.*
7. On suppose connue la vorticité $\zeta(x, y)$ induite par le vent en chaque point. Quelle équation vérifie maintenant ψ ?

1.2 Simulation

1. Dessiner votre étang sous COMSOL. Prenez une taille réaliste (de l'ordre du km), et une forme intéressante. On pourra éventuellement tenter de reproduire un plan d'eau existant (on pourra facilement trouver par exemple des informations sur un cas récent de pollution de l'étang de Narbonne-Bages-Sigean par un composé toxique entrant dans la composition d'un insecticide).
2. Fixez le débit et calculer l'écoulement en l'absence de vent. Tracez le champ de vitesse et/ou les lignes de courant.

3. Fermez maintenant les entrées-sorties et imposez un profil de vent non-uniforme. En utilisant les données en annexe, déduisez-en le terme source de vorticité. Faites la simulation en ajustant votre profil de vent pour avoir des effets de circulation intéressants.
4. Ré-ouvrez les entrées-sorties du plan d'eau en maintenant le vent. Ajustez si nécessaire.

2 Transport et absorption d'un polluant

2.1 Modélisation

1. On suppose que l'eau transporte un polluant fortement dilué. Rappelez l'équation de transport de ce polluant. on notera C la concentration.
2. On suppose ce polluant issu d'une usine, matérialisée par un morceau de frontière du lac. Déterminez les expressions des conditions aux limites :
   – sur la frontière-usine
   – sur la frontière matérialisant l'entrée
   – sur la frontière matérialisant la sortie
   – sur les autres frontières de l'étang.
3. Comment cette équation de transport est-elle couplée à l'EDP sur ψ ? Le système d'EDP résultat est-il linéaire ? Peut-on le découpler, c'est-à-dire résoudre l'une des équations, puis l'autre ?
4. On suppose que les organismes sous-marins stockent le polluant (c'est souvent le cas de coquillages). Comment représentez-vous ce phénomène ?
5. Identifiez tous les nombres adimensionnels associés à l'équation de transport-absorption du polluant.

2.2 Simulation

1. Localisez l'usine sur la frontière de votre étang.
2. Etudiez l'évolution du polluant sous différentes conditions (étang ouvert ou fermé, variation du vent), en l'absence d'absorption.
3. Entrez un terme d'absorption réaliste, et faites le varier.

Un modèle simple de bathymétrie. Applications

On souhaite étudier la sensbilité de certains phénomènes à la profondeur locale de l'étang que l'on note $h(x, y)$. Comme cette donnée serait difficile à rentrer à la main, chercher une EDP que pourrait raisonnablement vérifier h, ainsi que les conditions aux limites.

Ajouter cette EDP à votre modèle et inventez des applications.

A Conseils

- Ecrivez toutes vos équations et conditions aux limites sur le papier avant de toucher à COMSOL. Vous gagnerez du temps au final.
- Entrez toutes les données numériques dans `Options -> Constantes` et toutes les fonctions mathématiques dans `Options -> Expressions -> Expressions scalaires`. Idéalement aucune des cases de la définition du problème, sous-domaine ou frontières, ne doit contenir de données numériques ou de formule compliquée.
- ne choississez pas vos ordres de grandeurs au hasard, faites des calculs d'ordre de grandeur simples, et faites appel à votre sens physique.
- utilisez les groupes pour vos conditions aux frontières (demandez conseil à votre intervenant)
- si vous imprimez vos résultats en noir et blanc, pensez à changer la colormap dans le post-processeur. Bien souvent les données de surface peuvent être avantaguesement remplacées par des courbes de niveaux en noir.
- Soyez inventifs mais rigoureux ! Il vaut mieux ne traiter qu'une partie, mais qu'elle soit correcte plutôt que de présenter une tonne de résultats fantaisistes.
- Seul le solveur linéaire est nécessaire ici, ce qui signifie que les calculs sont très rapides. Profitez-en !

B Quelques formules d'analyse vectorielle

B.1 Identités

$$\operatorname{div}(\mathbf{rot}\,\mathbf{w}) = 0 \tag{1}$$

$$\mathbf{rot}\,(\mathbf{grad}\,a) = 0 \tag{2}$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{grad}\,a) = \nabla^2 a \qquad \text{(Laplacien)} \tag{3}$$

$$\mathbf{rot}\,(\mathbf{rot}\,\mathbf{w}) = \mathbf{grad}\,(\operatorname{div}\mathbf{w}) - \nabla^2\mathbf{w},$$

B.2 Formules de Green, Ostrogradski, et Stokes

$$\iiint_V \mathbf{grad}\,a\;dV = \iint_S a\mathbf{n}\;dS \tag{4}$$

$$\iiint_V \operatorname{div}\mathbf{u}\;dV = \iint_S \mathbf{u}.\mathbf{n}\;dS \tag{5}$$

$$\iint_S \mathbf{rot}\,\mathbf{w}.\mathbf{n}\;dS = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{w}.d\mathbf{l}, \tag{6}$$

où S est une surface fermée s'appuyant sur un contour $\mathcal{C}$. L'orientation du contour est donnée par la règle du tire-bouchon progressant dans le sens de $\mathbf{n}$.

B.3 Dérivation de produits

$$\operatorname{div}(a\mathbf{u}) = a\operatorname{div}\mathbf{u} + \mathbf{grad}\,a.\mathbf{u} \tag{7}$$

C Ecoulements irrotationnels

Tout d'abord une approche naïve : l'écoulement irrotationnel (dit aussi potentiel) prédit par exemple que les lignes de courant se referment derrière un obstacle. On peut s'en apercevoir si on simule une île. Or, on sait bien qu'à fort Reynolds, ce n'est pas le cas : il y a un sillage derrière l'obstacle, car les lignes de courant décollent. Dans le sillage on pourrait par exemple voir des recirculations. On pourrait donc introduire de la vorticité artificiellement pour rendre compte de ce phénomène.

Plus généralement, qu'est ce qu'un écoulement irrotationnel ? Le théorème de Kelvin dit qu'un écoulement initialement irrotationnel le reste à condition que :

– les forces de volume dérivent d'un potentiel. C'est vrai pour le poids mais faux pour Coriolis par exemple… On connaît le résultat : regardez la météo la télé, vous verrez des nuages tourbillonner sur des grandes échelles. Le Gulf-Stream est un autre exemple.
– pression et masse volumique sont reliées par une loi barotrope c.a.d $p = f(\rho)$. C'est vrai par exemple pour un écoulement isotherme, isentrope ou incompressible. Mais c'est faux notamment pour la convection naturelle, bien connue elle aussi pour faire "tourner" les fluides. C'est faux aussi en présence d'un gradient de salinité, d'où l'écoulement terrestre thermohaline : l'eau de surface se surconcentre en sel au niveau des pôles, à cause des icebergs, devient donc plus dense, et plonge vers le fond.
– enfin le plus important : le fluide doit être parfait. Ca c'est faux tout le temps. Tout le problème est de savoir si les effets visqueux sont concentrés ou non dans une couche limite. Oui, pour l'aile d'avion, non pour une sphère à grand Reynolds. On peut donc représenter correctement l'écoulement autour d'une aile avec un écoulement potentiel, mais pas celui autour d'une sphère, et plus généralement tous les cas où il y a des recirculations (élargissements brusques etc.).

Pour notre étang les effets visqueux sont négligeables loin des bords et du fond, et en l'absence d'obstacles "pathologiques". C'est pour ça que l'approche précédente marche pas mal. Maintenant si on veut "fabriquer" des tourbillons, par exemple induits par le vent, il faut corriger l'écoulement potentiel en lui rajoutant de la vorticité.

D L'étang de Leucate

Carte des courants dans l'étang de Leucate (lagune entre Narbonne et Perpignan) en présence de Tramontane (vent dominant dans le secteur). D'après le site de l'IFREMER.