TD-TP d'analyse numérique
Résolution numérique de l'équation de la chaleur en 1D par différences finies

Olivier LOUISNARD

2 avril 2008

On considère un mur d'épaisseur L, constitué d'un matériau homogène et isotrope, infini dans les deux autres dimensions.

1 Mise en équations et conditions aux limites

1. Rappelez l'équation de conduction de la chaleur dans une géométrie quelconque, puis dans une géométrie monodimensionnelle.
2. Exprimez les différentes conditions aux limites envisageables pour cette équation, dans le cas
   - d'une température imposée T_i
   - d'un flux de chaleur imposé q_i
   - d'un échange de chaleur convectif avec l'air ambiant, supposé maintenu à une température T_∞ très loin de la paroi.

   Exprimez également la condition initiale.
3. Quelle est la forme du profil de température dans le mur en régime permanent ? Ce régime permanent existe-t'il quelles que soient les conditions aux limites aux deux extrémités ? Pourquoi physiquement ? Calculer l'expression de ce profil lorsque les températures en $x = 0$ et $x = L$ sont imposées respectivement à T_g et T_d.

2 Résolution numérique : méthode explicite

On souhaite résoudre numériquement l'équation de la chaleur dans ce domaine. On prendra dans un premier temps des conditions aux limites de type température imposée T_g et T_d en $x = 0$ et en $x = L$. Initialement, le mur est à température constante $T = T_0$.

On cherche à discrétiser l'équation de la chaleur sur un maillage temporel et spatial. Pour ce faire,
– on découpera l'intervalle $[0, L]$ en M intervalles de même longueur Δx.
– on cherche à évaluer la solution en des instants t_n distants d'un pas Δt.
On notera

– $t_n = (n-1)\Delta t, \quad n = 1 \dots N+1$
– $x_i = (i-1)\Delta x, \quad i = 1 \dots M+1$
– $T_i^n = T(x_i, t_n)$

1. En utilisant des différences finies progressives en temps et centrées en espace, trouver une expression de la température T_i^{n+1} à l'instant t_{n+1} en fonction des températures à l'instant t_n en chaque noeud milieu du domaine ($i = 2 \dots M$).
2. Déterminez les températures aux limites à l'instant t_{n+1}.
3. Déduisez-en un algorithme pour construire par récurrence les températures en chaque point du mur à tout instant.
4. Exprimez la relation obtenue sous forme matricielle. A quelle condition l'algorithme obtenu est-il stable. En déduire une condition de stabilité reliant la diffusivité a et les pas Δx et Δt. Que signifie cette condition ?

3 Application

Ecrire un programme MATLAB qui implémente la méthode explicite, et qui trace les profils de température dans le mur à divers instants. On y superposera le profil en régime permanent calculé à la question 1.

Mettre en évidence la condition de stabilité en jouant sur le pas de temps.

On ne dépassera pas 20 points pour le maillage spatial. Le temps final de la simulation sera choisi judicieusement, sur des critères physiques.

On prendra comme données numériques (béton) :

Conductivité thermique	$\lambda = 0.92$ W.m^{-1}.K^{-1}
Densité	$\rho = 2300$ kg.m^{-3}
Capacité calorifique massique	$C = 960$ J.kg^{-1}.K^{-1}
Epaisseur du mur	$L = 0.2$ m

$T_0 = 25^{\circ}\mathrm{C}$

$T_g = 10^{\circ}\mathrm{C}$

$T_d = 50^{\circ}\mathrm{C}$

4 Méthode implicite

On cherche maintenant à écrire un algorithme inconditionnellement stable.

1. Utilisez maintenant des différences finies régressives en temps et toujours centrées en espace. Comparez la formule obtenue à la précédente. Pourquoi cette méthode est-elle appelée «implicite» ?
2. Ecrire cette relation sous forme matricielle. Qu'implique la mise en oeuvre de cet algorithme ?
3. Montrez que l'algorithme obtenu est inconditionnellement stable.

5 Autres conditions aux limites

On reprendre la question 1 en prenant des conditions aux limites plus réalistes. On suppose que le mur sépare l'air extérieur à température T_e^∞ de l'air intérieur à température T_i^∞. Les échanges d'énergie entre le mur et l'air sont modélisés par des coefficient de convection h_e et h_i.

1. Ecrire une relation entre $\frac{\partial T}{\partial x}$ et T en $x = 0$ et $x = L$.
2. Ecrire l'équation du profil en régime permanent pour T_e^∞ et T_i^∞ fixées.
3. Ecrire les conditions aux limites en $x = 0$ et $x = L$ discrétisées. On cherchera à écrire une condition entre T_1^{n+1} et T_2^{n+1}, et une autre entre T_{M+1}^{n+1} et T_M^{n+1}.
4. On suppose que l'on est en automne, que la température extérieure est T_{e0}^∞ depuis plusieurs jour. Le profil dans le mur est en régime permanent. L'hiver arrive et à $t = 0$, la température extérieure passe brutalement de T_{e0}^∞ à T_{e1}^∞. Ecrire un programme qui permet d'observer l'évolution de la température dans le mur au cours du temps après que l'air extérieur se soit refroidi.

On prendra les données numériques suivantes :

$h_e = 100$ W.m^{-2}.K^{-1}

$h_i = 20$ W.m^{-2}.K^{-1}

$T_{e0}^{\infty} = 15^{\circ}$C

$T_{e1}^{\infty} = 0^{\circ}$C

$T_{i}^{\infty} = 25^{\circ}$C

6 Méthode de Crank-Nicholson

La méthode de Crank-Nicholson est en fait une moyenne entre la méthode implicite et la méthode explicite.

Ecrire à nouveau le relation entre les températures à t_{n+1} et celles à t_n. Montrez que la méthode est inconditionnellement stable.

Cette méthode est préférable à la méthode implicite précédente, car on montre qu'elle est d'ordre 2.