# Travaux dirigés MATLAB

O. Louisnard

8 décembre 2010

Cette création est mise à disposition selon le Contrat Paternité-Pas d'Utilisation Commerciale-Pas de Modification 2.0 France disponible en ligne http ://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.0/fr/ ou par courrier postal à Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California 94105, USA.

# 1 Courbes. Fonctions. Boucles

### Exercice 1.1 : Tracé de fonctions (tracefoncs)

Tracer les courbes des fonctions suivantes (quand 2 courbes sont indiquées, les superposer). On écrira un fichier de commandes contenant toutes les instructions **plot** séparées par l'instruction **pause**.

- $y = \sqrt{(x^2 - x)}$ et $y = x - 1/2$ sur $[1, 3]$
- $y = \sin(\sin x)$ sur $[0, 2\pi]$
- $y = J_0(x)$ et $y = J_1(x)$ ($J_0$ et $J_1$ fonctions de Bessel de première espèce) sur $[0, 10\pi]$
- $y = J_0(x)$ et $y = \sin(x + \pi/4)/\sqrt{x}$ sur $[\pi/4, 10\pi]$
- $y = \mathrm{erf}(x)$ (fonction erreur) sur $[-3, 3]$

### Exercice 1.2 : Calcul de factorielle (facto)

Ecrire un programme qui calcule $n!$ pour une valeur de $n$ que l'on définira.

### Exercice 1.3 : Calcul d'une série (calserie)

Calculer la série :

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

On tronquera la sommation lorsque le terme général sera inférieur à $10^{-8}$ fois la somme partielle. Comparer le résultat numérique au résultat exact ($= \pi^2/6$ comme chacun sait :-).

### Exercice 1.4 : Fonctions définies par morceaux (tracefoncs2)

Tracer les courbes des fonctions suivantes (il n'est pas obligatoire d'écrire un fichier de fonction).

$$y = \begin{cases} y = 1 + x, & \text{pour } x \in [-1, 0], \\ y = 1 - x, & \text{pour } x \in [0, 1], \\ y = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} y = -(x+1)^2, & \text{pour } x < -1 \\ y = (x+1)^{3/2}, & \text{pour } x \in [-1, 0], \\ y = x^2 + \frac{3}{2}x + 1 & \text{pour } x \in [0, 2], \\ y = \frac{11}{2}x - 3 & \text{pour } x > 2 \end{cases}$$

**Exercice 1.5 : Ecriture d'une fonction (g et testg)**

- Ecrire une fonction appelée $g$, qui traduit la fonction mathématique $g(x) = x \log(x^2 + 1)$.
- Utiliser cette fonction pour évaluer $g(1)$.
- Tracer la fonction $g$ sur $[0, 10]$

**Exercice 1.6 : Ecriture d'une fonction $n!$ (ffact)**

Ecrire une fonction **ffact** qui reçoit un argument en entrée et calcule sa factorielle.

**Exercice 1.7 : Courbes définies en polaires (courbespol)**

Avec la fonction de conversion **pol2cart** et l'instruction **plot**, tracer les courbes définies en polaires par :

- $r = 1 + e \cos \theta$
- $r = \dfrac{1}{(1 + e \cos \theta)}$
- $r = 1$

On prendra pour $e$ une valeur entre 0 et 1. Reprendre l'exercice avec la commande **polar** (on regardera l'aide en ligne).

**Exercice 1.8 : Illustration des séries de Fourier (fourier)**

On considère la fonction sur l'intervalle $[0, 2\pi]$ :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x \leq \pi \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Ecrire une fonction MATLAB **carre** codant cette fonction mathématique. La fonction doit pouvoir s'appliquer indifféremment à un scalaire ou terme à terme à un tableau de dimension quelconque. Ecrire un programme principal pour tracer la fonction.
2. On peut montrer que cette fonction $f(x)$ coïncide sur $[0, 2\pi]$ avec la série de

Fourier :

$$g(x) = 1/2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-(-1)^n}{\pi n} \sin(nx)$$

Ecrire un programme MATLAB qui construit progressivement la série, et qui trace la fonction obtenue à chaque ajout d'un nouveau terme. Vérifiez que l'on retrouve bien, pour un grand nombre de termes, la fonction $f(x)$.

**Exercice 1.9 : Utilisation de global (vdw et testvdw)**

On souhaite écrire une fonction représentant l'équation d'état de Van der Waals d'un gaz donné :

$$p = \frac{RT}{v-b} - \frac{a}{v^2}$$

Mais on impose que la fonction n'ait que 2 arguments d'entrée $v$ et $T$, et 1 argument de sortie $p$, les autres grandeurs $a$, $b$ et $R$ étant considérées comme des constantes (on donne $R = 8.32$, $a = 0.5547$ et $b = 3.0516 \times 10^{-5}$ en unités S.I.).

1. Trouvez une solution avec l'aide du polycopié et de l'intervenant, et écrivez la fonction.
2. Ecrire un programme qui trace $p$ en fonction de $v$ pour $T = 200K$, $T = 300K$ et $T = 1000K$, sur un même graphique. On prendra $v$ variant entre $1.1b$ et $10b$.

**Exercice 1.10 : Ecriture d'une fonction de plusieurs variables**

Pour calculer la capacité calorifique $C_p$ d'un gaz en fonction de la température $T$ (en Kelvin), on dispose de corrélations du type :

$$C_p(T) = A + B\left(\frac{C/T}{\sinh(C/T)}\right)^2 + D\left(\frac{E/T}{\sinh(E/T)}\right)^2$$

Il est souvent intéressant de calculer également la primitive de cette fonction, qui s'exprime par :

$$\begin{aligned} I_p(T) &= \int C_p(T)dT \\ &= AT + BC\frac{1}{\tanh(C/T)} - DE\frac{1}{\tanh(E/T)} \end{aligned}$$

1. Ecrire dans un fichier une fonction MATLAB appelée **cpip** qui reçoit en entrée la température $T$ et les coeffcients $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, et calcule $C_p$ et $I_p$ en sortie. On spécifiera le nom du fichier utilisé.
2. Ecrire un programme MATLAB qui utilise la fonction précédente pour tracer $C_p(T)$ et $I_p(T)$ sur l'intervalle $T \in [250 \text{ K}, 3000 \text{ K}]$.
3. Pour des raisons pratiques, on veut que la fonction n'ait comme argument d'entrée *que la température* $T$. Comment faire ? Réécrivez la fonction et le programme.

### Exercice 1.11 : Projection de Mercator

Pour tracer des cartes géographiques, on utilise la *projection de Mercator* qui à un point d'une surface sphérique fait correspondre un point du plan. La projection est donnée par :

$$x = \theta \tag{1}$$

$$y = \log\left[\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right)\right] \tag{2}$$

où $\theta \in [0^\circ, 360^\circ]$ est la longitude et $\phi \in [-90^\circ, 90^\circ]$ la latitude.

1. Ecrire une fonction MATLAB effectuant la projection, qui renvoie les coordonnées $(x, y)$ sur la carte en fonction des deux coordonnées géographiques $\theta$ et $\phi$.
2. On vous fournit un fichier texte de données géographiques **world.txt**, organisé en deux colonnes (latitude, longitude), exprimées en degrés, décrivant les frontières des continents. Ecrire un programme utilisant la fonction précédente pour tracer la projection de Mercator des continents.
   *Note : on utilisera la fonction plot pour tracer point par point, sinon ça a une drôle de tête...*

### Exercice 1.12 : Perte de charge dans un tube

La perte de charge (= chute de pression) d'un fluide s'écoulant dans une longueur $L$ de tuyauterie s'écrit :

$$\Delta p = f \frac{1}{2} \rho v^2 \frac{L}{D} \tag{3}$$

où $v$ est la vitesse du fluide (m/s), $\rho$ sa masse volumique (kg/m$^3$), $L$ et $D$ longueur et diamètre du tuyau (m), et $f$ est un coefficient sans dimension que l'on peut calculer par l'expression :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -1.8 \log_{10}\left[\frac{6.9}{\text{Re}} + \left(\frac{\epsilon/D}{3.7}\right)^{1.11}\right] \tag{4}$$

où Re est le nombre de Reynolds $= \rho D v/\eta$, avec $\eta$ viscosité dynamique du fluide (kg.m$^{-1}$.s$^{-1}$), et $\epsilon$ est la rugosité du tuyau (m).

Votre chef s'angoisse un peu et vous dit :

*"Moi je n'y comprends rien à tout ça, et je veux juste calculer la chute de pression dans des conduites en acier qui font toujours 3 cm de diamètre, où s'écoule de l'eau à température ambiante, en fonction du débit volumique $Q$ (m$^3$/s) et de la longueur $L$. Ecris-moi une fonction ayant deux paramètres d'entrée $Q$ en m$^3$/s et $L$ en m, et qui me sorte la chute de pression $\Delta p$ en Pa (unité SI de la pression). Tu me feras aussi un programme principal qui teste ta fonction pour un débit de $10^{-3}$ m$^3$/s sur un tube de 50 m."*

Vous décidez de ne pas discuter et de vous exécuter, et comme vous êtes bon programmeur, vous vous interdisez d'écrire un quelconque paramètre numérique dans la fonction (hormis ceux intervenant dans la formule (7)).

On rappelle que le débit volumique $Q$ (en m$^3$/s) est relié à la vitesse $v$ (en m) par :

$$Q = \pi \frac{D^2}{4} v$$

avec $D$ exprimé en m, et on vous fournit les données suivantes :

- pour l'eau à 20°C, $\rho = 1000$ kg/m$^3$, $\eta = 10^{-3}$ kg.m$^{-1}$.s$^{-1}$,
- rugosité de l'acier commercial $\epsilon = 46$ $\mu$m.

# 2 Zéros de fonctions

### Exercice 2.1 : Recherche de zéros de fonctions (zbessel)

Chercher les 20 premiers zéros de la fonction de Bessel de premier espèce $J_1(x)$. Pour trouver une estimation de chaque zéro, on comparera graphiquement cette fonction à $\sin(x-\pi/4)$. Pour calculer la fonction $J_1$ en un point $x$ donné, on écrit en MATLAB : `besselj(1,x)`

> Ces zéros sont nécessaires pour calculer des solutions données sous forme de série d'équations aux dérivées partielles faisant intervenir le Laplacien en coordonnées cylindriques.

### Exercice 2.2 : Utilisation d'une LED

On branche une LED en série avec une résistance $R$, et on la connecte sur une source de tension $U_0$ (Fig. 1). On note $I$ le courant dans la branche, traversant à la fois la diode et la résistance.

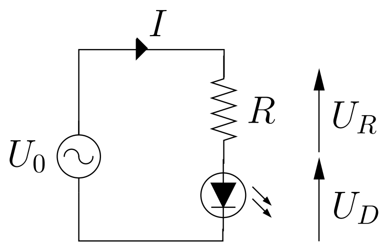



FIG. 1 – Circuit d'alimentation d'une LED

La LED est modélisable par la caractéristique :

$$I_D = I_{D_0} \exp\left(\frac{U_D}{U_{D_0}}\right), \tag{5}$$

et la loi des mailles appliquée au circuit 1 fournit l'équation :

$$U_0 = U_D + U_R$$

Reformuler cette expression sous la forme $f(I) = 0$ et écrire un programme MATLAB qui résoud cette équation avec la fonction `fzero`. On donne : $U_{D_0} = 0.265$ V, $I_{D_0} = 778$ nA, $R = 5\ \Omega$, $U_0 = 12$ V.

### Exercice 2.3 : Zéros de fonctions : calcul d'un équilibre chimique (eqchimique, feqchimique)

On considère la réaction chimique de dissociation du dioxyde de carbone en phase gazeuse :

$$CO_2 \leftrightharpoons CO + \frac{1}{2}O_2$$

La loi d'action de masse fournit indirectement la fraction molaire $x$ en CO à l'équilibre par :

$$x = \frac{2\alpha}{2+\alpha}$$

où $\alpha$ taux de conversion est solution de

$$K_e(T) = \frac{\alpha^{3/2}}{(1-\alpha)(2+\alpha)^{1/2}}$$

où $T$ la température en K et $K_e(T)$ la constante d'équilibre. On supposera qu'une formule approximative pour $K_e(T)$ est :

$$\ln(K_e) = \frac{-34000}{T} + 10.4$$

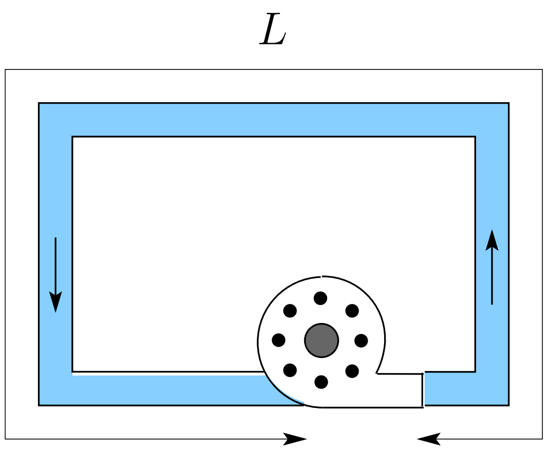
En utilisant la fonction **fzero**, trouver la valeur de $x$ aux températures $T = 300K, 1000K, 2000K$.

### Exercice 2.4 : Point de fonctionnement d'un circuit hydraulique

On alimente un circuit hydraulique dans lequel circule de l'eau à température ambiante, avec une pompe dont elle sait qu'elle augmente la pression de :

$$\Delta p = p_M \left[ 1 - \left( \frac{Q}{Q_m} \right)^2 \right]$$

où $Q$ est le débit volumique dans le circuit ($\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$), et $p_M$, $Q_m$ sont des paramètres donnés par le constructeur. Cette différence de pression est aussi la perte de charge le long de la tuyauterie sur laquelle elle est branchée, qu'on peut calculer par les expressions (3) et (7) .




1. Ecrire l'équation permettant de déterminer le débit $Q$ sous la forme $f(Q) = 0$.
2. Ecrire un programme MATLAB pour la résoudre. Toutes les données numériques devront être définies dans le programme principal.

3. Tester votre programme pour calculer le débit sur un tube de $L = 100$ m, puis sur un tube de $L = 200$ m . Calculer également dans les deux cas, la différence de pression $\Delta p$, la vitesse d'écoulement dans le tube, et le nombre de Reynolds.
4. Le constructeur de la pompe préconise que le rapport $Q/Q_m$ soit compris entre 0.5 et 0.7. Ces conditions de fonctionnement sont-elles respectées dans les deux cas ?

Données : celle de l'exercice précédent, $Q_m = 1.7 \times 10^{-3}$ m$^3$/s, $p_M = 2.8 \times 10^5$ Pa

**Exercice 2.5 : Isotherme d'adsorption (DS 2002) (tensioactif, ftensio)**

Dans l'eau, un tensioactif (les détergents, savons, shampoings en contiennent) est un composé chimique qui au lieu de se répartir uniformément dans toute la masse du liquide, va préférentiellement se loger aux interfaces liquide-air sous forme d'un film très mince. Par exemple dans un verre d'eau contenant une certaine quantité d'un tel produit, les molécules vont se placer à la surface libre de l'eau.

En fait, c'est un équilibre : certaines molécules vont à la surface, d'autres restent au coeur du liquide. Si on introduit une concentration volumique en tensioactif $c$ dans l'eau (en mol/m$^3$), on peut quantifier le nombre de molécules adsorbées à la surface par une concentration surfacique $\Gamma$ (en mol/m$^2$), les deux grandeurs étant reliées par :

$$c = \frac{1}{K_F} \frac{\Gamma}{\Gamma_\infty - \Gamma} \exp(-A\Gamma/\Gamma_\infty)$$

relation appelée isotherme de Frumkin, dans laquelle $K_F$, $\Gamma_\infty$ et $A$ sont des données physiques connues pour un tensioactif donné.

On voit donc que connaissant $c$, il est possible de déterminer $\Gamma$ en résolvant une équation implicite.

En fait $\Gamma$ n'est pas la grandeur intéressante en soi. On s'intéresse plutôt en général à la chute de tension superficielle[1] donnée par :

$$\Pi = -RT \left[ \Gamma_\infty \log\left(1 - \frac{\Gamma}{\Gamma_\infty}\right) + \frac{1}{2} A\Gamma_\infty \left(\frac{\Gamma}{\Gamma_\infty}\right)^2 \right]$$

où $R$ est la constante des gaz parfaits.

[1] La tension superficielle est l'énergie nécessaire pour augmenter l'interface liquide-air d'une certaine quantité. Cette tension superficielle diminue en présence de tensioactifs, cette variation étant donnée par la grandeur $\Pi$ définie ci-dessus.

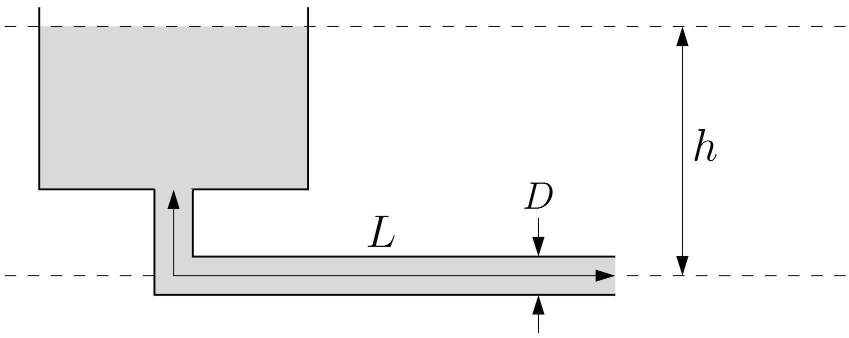
1. Ecrire un programme qui, pour une concentration en tensioactif introduite $c$ donnée, calcule la concentration surfacique $\Gamma$. On utilisera la fonction **fzero** en s'inspirant de l'exercice 5 traité en TD.
2. En déduire la chute de tension superficielle $\Pi$ pour cette valeur de $c$.

On donne, pour le Triton X100 les valeurs suivantes :
– $\Gamma_\infty = 3.2 \times 10^{-6}$ mol/m$^2$
– $K_F = 3.2 \times 10^3$ m$^3$/mol,
– $A = 2.52$
On rappelle que $R = 8.32$ J/mol/K et on prendra une température de $298K$.

**Exercice 2.6 : Débit engendré par une citerne**

*Préliminaire : pensez à convertir les unités des données en unités S.I. !*

Une citerne domestique alimente un tuyau d'arrosage de diamètre $D$ et de longueur $L$. La surface libre dans la citerne est placée à une hauteur $h$ au dessus de la sortie du tuyau.




On cherche la vitesse $v$ en sortie du tuyau. La formule de Bernoulli généralisée montre que cette vitesse est solution de l'équation implicite :

$$\frac{v^2}{2g}\left(1 + f(v)\frac{L}{D}\right) = h \tag{6}$$

où $g = 9.81$ m.s$^{-2}$ est la pesanteur, et le coefficient de perte de charges $f(v)$ est donné par :

$$\frac{1}{\sqrt{f(v)}} = -1.8\log_{10}\left[\frac{6.9}{\mathrm{Re}} + \left(\frac{\epsilon/D}{3.7}\right)^{1.11}\right] \qquad \text{avec} \qquad \mathrm{Re} = \frac{\rho v D}{\eta} \tag{7}$$

où $\epsilon$ est la rugosité du tuyau, $\rho$ la masse volumique de l'eau et $\eta$ sa viscosité. Le débit vaut alors $Q = v\pi D^2/4$

1. Ecrire un programme MATLAB et, le cas échéant, ses fonctions associées, pour déterminer la vitesse du fluide en sortie. Toutes les données numériques devront être définies dans le programme principal.

   Si besoin est on pourra prendre comme estimation de la vitesse du fluide la vitesse de Toricelli $v_{\text{Tor}} = \sqrt{2gh}$.
2. Entrez sur Campus les valeurs de la vitesse en m.s$^{-1}$ et du débit en l/min.

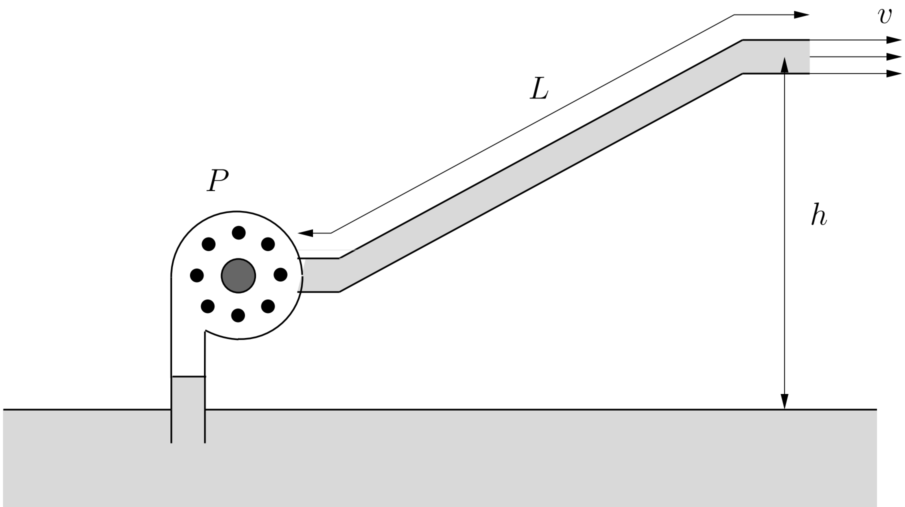
On vous fournit les données suivantes :

- pour l'eau à 20°C, $\rho = 1000$ kg/m$^3$, $\eta = 10^{-3}$ kg.m$^{-1}$.s$^{-1}$,
- $h = 10$ m, $D = 1.5$ cm, $L = 20$ m,
- rugosité du tuyau $\epsilon = 1.5$ $\mu$m.

**Exercice 2.7 : Pompage d'eau**

On pompe de l'eau dans un réservoir pour la faire sortir plus haut à une hauteur $h$ avec une vitesse $v$. On note $S$ la section du tube $D$ son diamètre, $L$ sa longueur totale, $\rho$ la masse volumique de l'eau, $\nu$ sa viscosité cinématique, $P$ la puissance de la pompe. Le cours de mécanique des fluides montre que la vitesse $v$ est donnée implicitement par l'équation

$$P = \rho g S v \left[ h + \frac{v^2}{2g} \left( 1 + \frac{L}{D} f(v) \right) \right] \tag{8}$$




où le coefficient de frottement $f(v)$ dépendant de $v$ s'écrit

$$f(v) = \frac{0.314}{\left(\dfrac{Dv}{\nu}\right)^{1/4}} \tag{9}$$

1. Ecrire un programme qui pour $P = 500$ W et $h = 50$ m permet de calculer la vitesse de sortie $v$. On utilisera la fonction **fzero** étudiée en TD. On prendra les données suivantes : $D = 4$ cm, $L = 100$ m, $\rho = 1000$ kg/m$^3$, $\nu = 10^{-6}$ m$^2$/s. On veillera à utiliser si nécessaire le passage des variables avec **global**. *On prendra garde aux unités !*
2. On veut maintenant tracer les courbes $h(v)$ pour $v$ variant entre 1 et 10 m/s, pour $P = 500$, 1000, 2000 et 3000 W. Ecrire un autre programme qui trace ce réseau de courbes (inutile de réécrire l'affectation des constantes).

   **Important :** Toute solution n'utilisant pas **meshgrid**, ou utilisant des boucles ou des tests ne sera pas notée.

# 3 Fonctions graphiques avancées

**Exercice 3.1 : Tracés de surfaces en cartésiennes (surfcart)**

On considère la superposition de deux ondes élastiques (par exemple la déformation d'un fil) l'une progressant dans le sens des $x > 0$ l'autre dans le sens des $x < 0$. La solution mathématique de l'équation de propagation est :

$$u(x,t) = f(x+t) + f(x-t)$$

où la fonction $f$ est liée à la déformation initiale de la corde et est définie par :

$$f(v) = \begin{cases} 1 - v^2 & \text{pour} \quad v \in [-1,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ecrire un programme pour tracer la déformation $u$ de la corde sur l'intervalle $x \in [-15, 15]$ aux temps $t = 0, 3, 6, 9, 12$. On pourra s'inspirer de l'exercice 10. On **devra** programmer la fonction $f$ au choix dans une instruction **inline** ou dans un fichier fonction.

*ATTENTION : toute solution écrite avec des boucles **for** et/ou des test **if** ne sera pas notée.*

**Exercice 3.2 : Tracés de surfaces en cartésiennes (surfcart)**

1. Tracer la surface d'équation

   $$z = \operatorname{erf}(xy)$$

   pour $(x, y) \in [-1, 1] \times [1, 10]$.
2. On cherche à tracer le réseau de courbes paramétrées définies par :

   $$z = \operatorname{erf}(mx)$$

   où $m$ est un paramètre variant entre 1 et 10. Comment peut-on, en une ligne supplémentaire, traiter ce problème avec le programme précédent ?

**Exercice 3.3 : Tracés de surfaces en cylindriques (surfcyl)**

Tracer les surfaces définies en coordonnées cylindriques par

$$z = \frac{\sin r}{r}(1 + \cos\theta)$$
$$z = \frac{\sin r}{r}$$
$$z = r$$

On définira un maillage de $r$ et $\theta$, et on croisera les tableaux avec la fonction **meshgrid**. On utilisera ensuite la fonction **pol2cart** qui convertit des coordonnées cylindriques en coordonnées cartésiennes.

**Exercice 3.4 : Changement de coordonnées (DS 2000 et 2001) (tor2cart, tracetore)**

Les coordonnées toroïdales $(\theta, v, \phi)$ sont définies par les équations suivantes, dans lesquelles $(x, y, z)$ sont les coordonnées cartésiennes :

$$x = \frac{\sinh v \cos\phi}{\cosh v - \cos\theta}$$
$$y = \frac{\sinh v \sin\phi}{\cosh v - \cos\theta}$$
$$z = \frac{\sin\theta}{\cosh v - \cos\theta}$$

1. Ecrire la fonction **tor2cart** qui transforme des coordonnées toroïdales $(\theta, v, \phi)$ en coordonnées cartésiennes. La fonction doit pouvoir fonctionner sur des tableaux de taille quelconque. On spécifiera aussi le nom du fichier contenant la fonction.
2. Ecrivez un programme qui trace la surface d'équation $v = 2$ en coordonnées toroïdales (c'est un tore ...). On utilisera bien sûr la fonction écrite à la question précédente ; le maillage sera effectué sur les coordonnées toroïdales ; on prendra $\theta$ et $\phi$ variant sur l'intervalle $[0, 2\pi]$ ; aucune boucle ne sera écrite.

**Exercice 3.5 : Transfert thermique dans un mur semi-infini (mursemiinf)**

On rappelle que le profil de température dans un mur semi-infini, initialement à température $T_0$, soumis à un échelon de température $T_1$, s'écrit au cours du temps :

$$T(x,t) = T_0 + (T_1 - T_0)\,\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right)$$

où $a$ est la diffusivité thermique dans le matériau.

1. Tracez le profil à 10 instants différents entre 0 et 1 m. On choisira le dernier instant judicieusement pour bien représenter l'évolution temporelle du profil.
2. Tracez les évolutions temporelles des températures en des points situés tous les 10 cm jusqu'à 1 m. On choisira ici encore judicieusement l'intervalle de temps.

**Exercice 3.6 : Spectre du corps noir**

Le spectre d'énergie lumineuse radié par un corps noir est donné en fonction de la longueur d'onde $\lambda$ et de la température $T$ par la distribution de Planck :

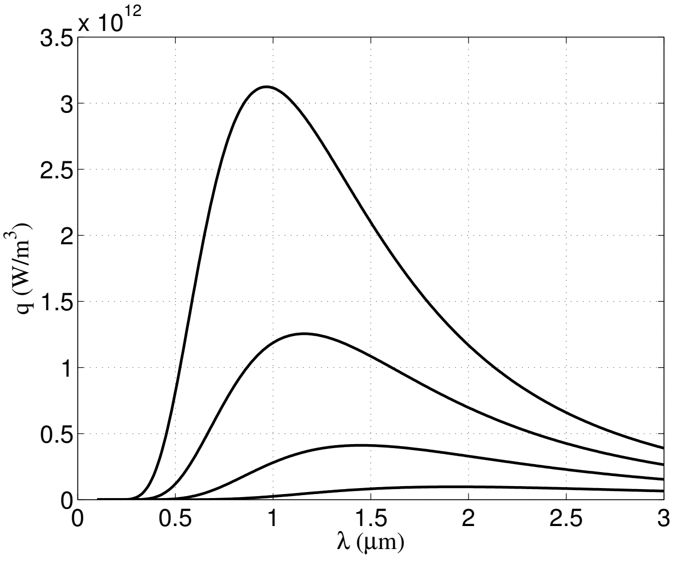
$$q(\lambda, T) = \frac{2\pi c^2 h}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\dfrac{ch}{\lambda k T}\right) - 1}$$

avec $q(\lambda, T)$ en W/m$^3$ et :

| | |
|---|---|
| $c = 3 \times 10^8$ m/s | vitesse de la lumière |
| $h = 6.62 \times 10^{-34}$ J.s | constante de Planck |
| $k = 1.38 \times 10^{-23}$ J.K$^{-1}$.molecule$^{-1}$ | constante de Bolzmann |

Ecrire un programme qui trace la densité $q(\lambda, T)$ en fonction de $\lambda$ pour T = 1500, 2000, 2500 et 3000 K. ATTENTION :

- les abscisses $\lambda$ devront apparaître en $\mu$m (des points seront malgré tout accordés si elles ne le sont pas).
- on utilisera la fonction **meshgrid**. Toute boucle est proscrite (et sera sanctionnée).



**Exercice 3.7 : Mécanique quantique : puit de potentiel**

Une particule, de masse $m$ et d'énergie $E$ est astreinte à se déplacer suivant un axe $x$ et arrive depuis les $x < 0$ sur une barrière de potentiel de largeur $a$ et de valeur $V_0$ (figure 2). La mécanique classique prédit que cette particule sera repoussée si $E < V_0$, et franchira la barrière si $E > V_0$.

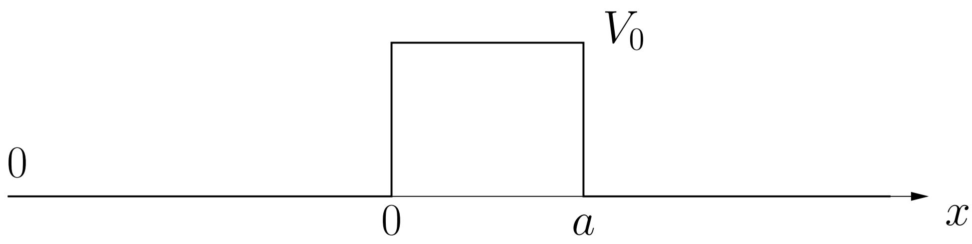



FIG. 2 –

La réalité physique montre que pour des largeur $a$ très petites, il en va autrement, et un traitement quantique doit alors être utilisé. La mécanique quantique montre que la probabilité $T$ pour que la particule franchisse la barrière est donnée par :

$$T = \left[1 + \frac{\sinh^2 \sqrt{\alpha(1 - E/V_0)}}{(4E/V_0)(1 - E/V_0)}\right]^{-1}, \qquad \text{si } E < V_0$$

$$T = \left[1 + \frac{\sin^2 \sqrt{\alpha(E/V_0 - 1)}}{(4E/V_0)(E/V_0 - 1)}\right]^{-1}, \qquad \text{si } E > V_0$$

avec $\alpha = 2mV_0a^2/\hbar^2$, $\hbar = h/2\pi$ étant la constante de Planck réduite.

Ecrire un programme qui trace sur une même figure les courbes $T$ en fonction de $e = E/V_0$, pour $\alpha$ = 1,2,5 et 10 (figure 3). On prendra $e$ entre 0.1 et 6.

**Important :** Toute solution n'utilisant pas **meshgrid**, ou utilisant des boucles ou des tests ne sera pas notée. On prendra bien garde par ailleurs au fait qu'il y a un sinh dans la première formule, et un sin dans la seconde.

**Exercice 3.8 : Diffusion-réaction dans un milieu semi infini. (diffusion-reaction)**

Une piscine de profondeur infinie est initialement remplie d'eau pure. A l'instant initial, on impose un échelon de concentration en $CO_2$ à la surface (z=0). Par ailleurs,

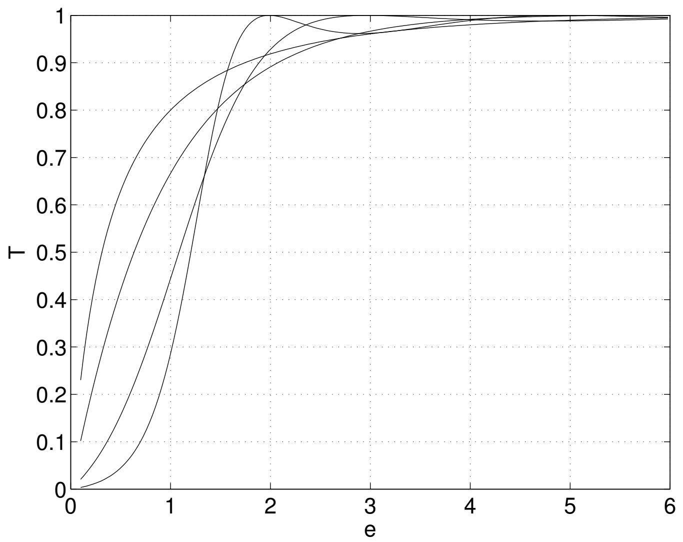



FIG. 3 –

le $CO_2$ est consommé par la réaction de photosynthèse à mesure qu'il diffuse dans l'eau, la masse absorbée par unité de volume et de temps s'écrivant $r_A = -k_1\rho_A$.

La résolution analytique de ce problème par les transformées de Laplace fournit le profil de concentration (sous forme adimensionnelle) :

$$\frac{\rho_A}{\rho_{A_0}} = \frac{1}{2}\left[e^{-z^*}\,\mathrm{erfc}\left(\frac{z^*}{2\sqrt{t^*}} - \sqrt{t^*}\right) + e^{z^*}\,\mathrm{erfc}\left(\frac{z^*}{2\sqrt{t^*}} + \sqrt{t^*}\right)\right]$$

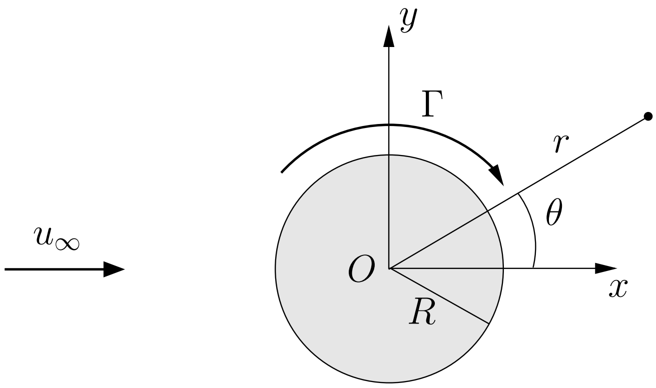
où $t^*$ et $z^*$ sont des temps et longueurs adimensionnels définis par :

$$t^* = k_1 t \qquad\qquad z^* = z\sqrt{\frac{k_1}{D_{\mathrm{AB}}}}$$

Tracez le profil de concentration (en fonction de $z^*$) pour différents temps $t^*$. Que se passe-t'il quand $t^* \rightarrow \infty$ ? Que prédit à ce sujet la solution analytique écrite ci-dessus ?

### Exercice 3.9 : Ecoulement potentiel autour d'un cylindre en rotation (DS 2001) (magnus)

On considère un écoulement potentiel autour d'un cylindre infiniment long tournant sur lui-même, de rayon $R$ et de centre $O$. Loin du cylindre, la vitesse du fluide vaut $u_\infty$ et est orientée suivant l'axe des $x$. La rotation du cylindre introduit une circulation du fluide non nulle notée $\Gamma$. Dans le plan $xOy$ perpendiculaire à l'axe du cylindre, on repère un point par ses coordonnées polaires $(r,\theta)$.

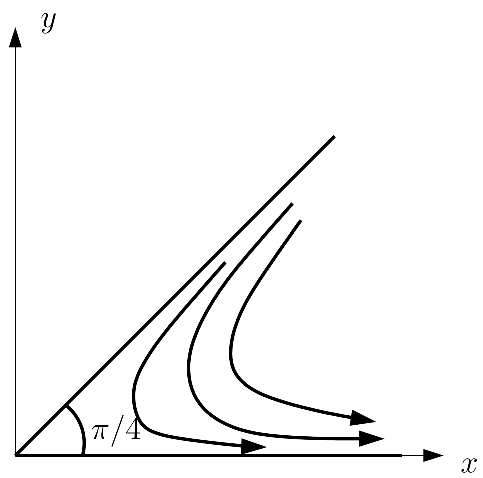



On montre que les composantes du champ de vitesse dans le repère tournant s'écrivent :

$$\frac{u_r}{u_\infty} = \cos\theta \left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^2\right]$$
$$\frac{u_\theta}{u_\infty} = -\sin\theta \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^2\right] + \frac{\Gamma}{2\pi u_\infty r}$$

1. Ecrire un programme qui trace ce champ de vitesse grâce a la fonction **quiver**. On effectuera un maillage cartésien du rectangle $[-10R, 10R] \times [-4R, 4R]$. On prendra les données numériques suivantes :
   $R = 0.2$ m
   $u_\infty = 20$ m/s
   La circulation $\Gamma$ sera calculée par :
   $$\Gamma = \alpha \times 4\pi R u_\infty$$
   où $\alpha$ est un coefficient de l'ordre de 1.
2. Calculer le champ de pression à l'aide de la formule de Bernoulli :
   $$p + \frac{1}{2}\rho \mathbf{u}^2 = Cte$$
   et tracer les isobares à l'aide de la fonction **contour** (on répètera le problème pour différentes valeurs de $\alpha$, en prenant successivement une valeur inférieure à 1 et une valeur supérieure à 1)

Note supplémentaire : l'effet de la rotation du cylindre introduit une force suivant $Oy$ qui a tendance à déporter l'obstacle de sa trajectoire rectiligne. Cet effet appelé effet « Magnus» intervient dans les coups «coupés» ou «liftés» dans les sports de raquette ainsi que dans les coups de pied «brossés» au football.




**Exercice 3.10 : Ecoulement potentiel dans un dièdre (DS 2002) (diedre)**

Les lignes de courant d'un écoulement bidimensionnel incompressible autour de formes simples peuvent être tracées simplement à partir du calcul d'une fonction complexe $f(z)$, où $z = x + iy$ représente la position d'un point $(x, y)$ dans le plan.

Pour ce faire, on utilise le fait que les lignes de courant sont les courbes $\psi(x, y) = C^{\text{te}}$ dans le plan, où :

$$\psi(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$$

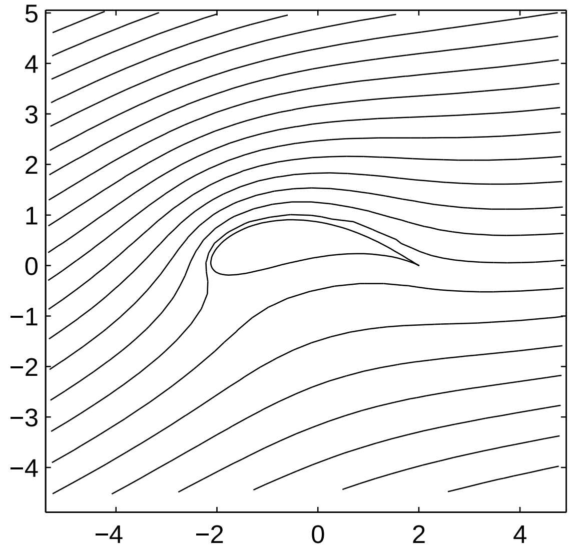
Ainsi l'écoulement autour d'un coin d'angle $\pi/n$ de sommet 0 est représenté par la fonction :

$$f(z) = z^n$$

Ecrire un programme qui trace les lignes de courant autour d'un coin d'angle $\pi/4$. On effectuera tout d'abord un maillage en polaires du domaine intéressant.

**Exercice 3.11 : Ecoulement potentiel autour d'une aile d'avion (aileavion)**

Les lignes de courant et les equipotentielles d'un écoulement bidimensionnel incompressible et irrotationnel autour de profils peuvent être calculées et tracées simplement à partir d'une fonction complexe holomorphe $f(z)$, où $z = x + iy$ représente la position d'un point $(x, y)$ dans le plan.




Si $f(z) = \phi(z) + i\psi(z)$, les lignes de courant sont les courbes $\psi(x, y) = C^{\text{te}}$ et les lignes equipotentielles sont les courbes $\phi(x, y) = C^{\text{te}}$.

Ainsi l'écoulement autour d'un profil de Joukovski (représentant assez précisément les profils d'aile d'avion ou les aubes de compresseurs) est représenté par la fonction :

$$f(z) = V_\infty \left[ (z - z_0)e^{-i\alpha} + \frac{a^2}{(z - z_0)e^{-i\alpha}} \right] + 2ia\sin(\alpha - \beta)\log(z - z0)$$

où
- $z_0$ est un complexe définissant la cambrure et l'épaisseur du profil et est une donnée du problème (par exemple $0.2 + 0.3i$).
- $a$ et $\beta$ sont liés au paramètre $z_0$ et sont définis par $1 - z_0 = ae^{i\beta}$
- $\alpha$ est l'angle d'incidence (vous aurez remarqué que les avions sont toujours un peu inclinés avec "le nez en l'air"). C'est une donnée du problème à définir au début du programme.
- $V_\infty$ est la vitesse de l'écoulement incident (celle de l'avion) et est aussi une donnée du problème.

Ecrire un programme qui trace les lignes de courant de cet écoulement. On effectuera tout d'abord un maillage cartésien du domaine $[-4a, 4a] \times [-4a, 4a]$. On veillera à calculer correctement les paramètres de $a$ et $\beta$.

On rappelle les fonctions suivantes dans MATLAB :

- $|z|$ s'écrit **abs(z)**
- $\arg(z)$ s'écrit **angle(z)**
- partie réelle s'écrit **real(z)**
- partie imaginaire s'écrit **imag(z)**

## Exercice 3.12 : Ecoulement rampant autour d'une sphère (rampant)

A faible nombre de Reynolds, on montre que le champ de vitesse autour d'une sphère plongé dans un écoulement incident de vitesse $u_\infty$ s'écrit, en coordonnées sphériques :

$$u_r/u_\infty = \cos\theta \left[-1 + \frac{3}{2}\frac{R}{r} - \frac{1}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^3\right]$$
$$u_\theta/u_\infty = \sin\theta \left[1 - \frac{3}{4}\frac{R}{r} - \frac{1}{4}\left(\frac{R}{r}\right)^3\right]$$

où $\theta$ est l'angle polaire orienté dans le sens de la vitesse $u_\infty$

1- Tracer ce champ de vitesse à l'aide de la fonction **quiver**. On définira d'abord un maillage cartésien sur l'intervalle $[-3R, 3R] \times [-3R, 3R]$, et on utilisera la fonction **cart2pol** pour obtenir les coordonnées sphériques correspondantes. On prendra arbitrairement R=1.

Afin de supprimer les points intérieurs à la sphère, pour lesquels l'expression ci-dessus est bien sûr fausse, on leur affectera une vitesse nulle.

2- La perturbation de pression autour de la sphère est donné par :

$$p(r,\theta) = -\frac{3}{2}\mu R \frac{u_r}{r^2}$$

Tracez les isobares avec la fonction **contour**.

## Exercice 3.13 : Déformations d'une membrane circulaire

Les déformations d'une membrane circulaire de rayon $a$ (une peau de tambour) peuvent être représentées par une somme infinie de «modes» de vibrations. La surface correspondant à chacun de ces modes s'écrit, en coordonnées cylindriques $(r, \theta, z)$ :

$$z = \cos(m\theta) J_m\left(\pi\beta_{mn}\frac{r}{a}\right) \qquad m = 0, \infty \qquad n = 1, \infty \tag{10}$$

Dans cette équation :
- $J_m$ est la fonction de Bessel de première espèce, et peut être calculée sous MATLAB grâce à la fonction **besselJ**. Ainsi $J_m(x)$ s'écrit en MATLAB `besselJ (m, x)`
- La constante $\beta_{mn}$ est la $n^{\text{ème}}$ racine de l'équation $J_m(\pi\beta) = 0$. Pour simplifier le problème on supposera qu'il existe une fonction **betaJ** qui prend $n$ et $m$ en entrée et renvoie $\beta_{mn}$.

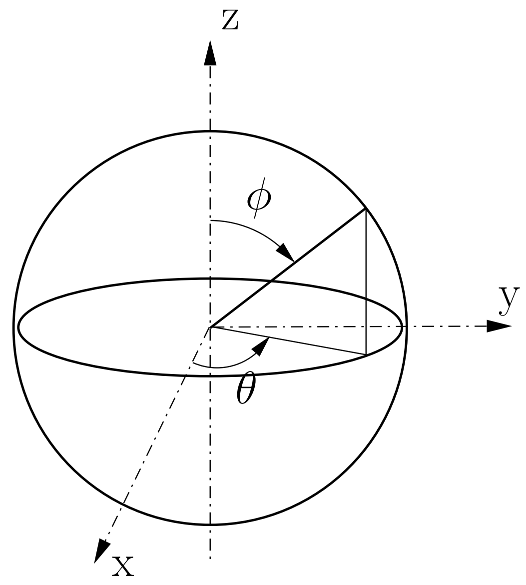



FIG. 4 – Définition des coordonnées sphériques

Ecrire un programme qui pour un $n$ et un $m$ définis au début du programme, trace la surface définie par l'équation (10). On donnera une valeur quelconque à $a$.

**Exercice 3.14 : Harmoniques sphériques (harmsph)**

Les déformations d'une surface sphérique (bulle, goutte) peuvent s'exprimer en coordonnées sphériques sous la forme d'une série de fonctions propres :

$$r(\phi, \theta) = R + \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^{n} f_{nm} Y_n^m(\phi, \theta)$$

Les fonctions $Y_n^m$ sont appelées «harmoniques sphériques», et sont définies par :

$$\begin{aligned} Y_n^0(\phi, \theta) &= P_n^0(\cos\phi) \\ Y_n^m(\phi, \theta) &= \cos(m\theta) P_n^m(\cos\phi) \\ Y_n^{-m}(\phi, \theta) &= \sin(m\theta) P_n^m(\cos\phi) \end{aligned}$$

où les fonctions $P_n^m$ sont les fonctions de Legendre

Les angles $\phi$ et $\theta$ sont définis sur la figure 4.

Afin de visualiser ces fonctions de Legendre, on se propose d'écrire un programme permettant de tracer la surface sphérique de rayon 1 déformée par l'une des fonctions $Y_n^m$, pour $n$ et $m$ donné, c'est-à-dire la surface d'équation :

$$r(\phi, \theta) = R + \alpha Y_n^m(\phi, \theta),$$

On prendra $R = 1$ et $\alpha$ de l'ordre de 1.

On utilisera la fonction **fleg** qui calcule les fonctions $P_n^m$, et la fonction **sph2cart** qui transforme des coordonnées sphériques en coordonnées cartésiennes. Pour récupérer **fleg** dans le directory courant, tapez sous UNIX :

```
cp /usr/local/public/matlab/fleg.m .
```

puis dans MATLAB, tapez **help fleg**

ATTENTION : la définition de l'angle $\phi$ pour **sph2cart** est différente de celle de la figure 4.

Pour information seulement : les fonctions de Legendre sont définies par :

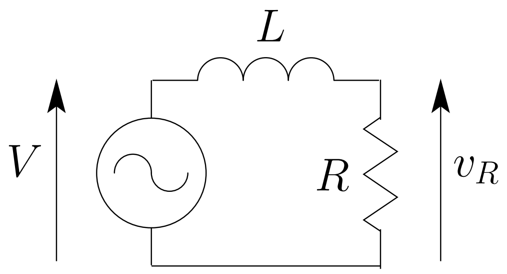
$$P_n^m(x) = (-1)^m (1 - x^2)^{(m/2)} \left(\frac{d}{dx}\right)^m P_n(x) \qquad m \leq n$$

où $P_n$ est le polynôme de Legendre de degré $n$.

# 4 Régression linéaire. Identification

### Exercice 4.1 : Mesure d'une inductance

Un inductancemètre est un appareil coûteux. Pour mesurer simplement des inductances fabriquées “maison”, on peut utiliser le circuit suivant :




Un générateur de tension sinusoïdale est branché sur un circuit comportant l'inductance $L$ et une résistance $R = 1000\ \Omega$. On montre que la tension efficace mesurée aux bornes de la résistance s'exprime en fonction de la tension efficace aux bornes du générateur par :

$$v_R = \frac{V}{\sqrt{1 + \left(\frac{2\pi f L}{R}\right)^2}} \tag{11}$$

On effectue des mesures de $V$ et $v_R$ pour différentes fréquences $f$. Les résultats sont disponibles dans le fichier `selfres.txt` :

- Colonne 1 : valeurs de $f$ en Hz
- Colonne 2 : valeurs de $V$ en V
- Colonne 3 : valeurs de $v_R$ en V

1. Ecrire un programme MATLAB qui charge le fichier `selfres.txt`, et qui, en utilisant l'instruction `polyfit`, effectue une approximation par une droite permettant de déterminer $L$.

   On réfléchira soigneusement à la façon dont il faut reformuler l'équation (11) pour ce faire.
2. Entrez sur Campus la valeur numérique de $L$ obtenue, **en mH**.

### Exercice 4.2 : Caractéristique d'une LED

Dans une phase de conception, on veut simuler un circuit d'allumage de feux arrières de voiture réalisé avec des diodes électro-luminescentes (LEDs) de puissance. Pour cela, il est nécessaire de connaître la caractéristique passante $I_D = f(U_D)$ d'une

LED, où $I_D$ courant dans la LED et $U_D$ tension à ses bornes. On effectue une série de mesures et on écrit les résultats dans un fichier texte `LED.res` dont la première colonne contient les valeurs de $I_D$ en A, et la deuxième celles de $U_D$ en V.

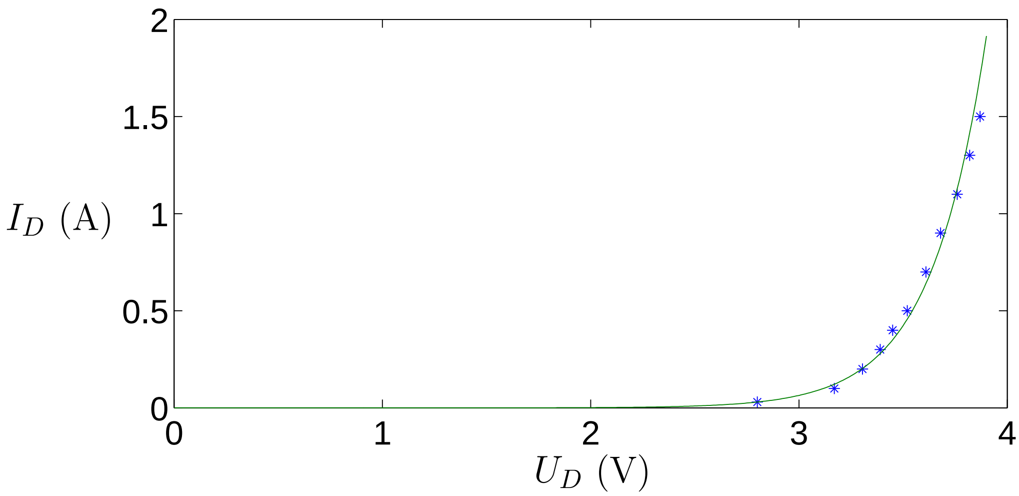



FIG. 5 – Caractéristique de la LED

On souhaite représenter la LED par la caractéristique théorique :

$$I_D = I_{D_0} \exp\left(\frac{U_D}{U_{D_0}}\right) \tag{12}$$

1. Ecrire un programme MATLAB qui lit le fichier `LED.res`, et qui, en utilisant l'instruction `polyfit`, effectue une approximation par une droite permettant d'identifier les paramètres $U_{D_0}$ et $I_{D_0}$.
2. Tracer les points de la caractéristique mesurés, ainsi que l'approximation obtenue (le graphique obtenu doit être proche de la figure 5).

**Exercice 4.3 : Approximation de données (approxdon)**

Le nombre de Prandtl de l'air est donnée en fonction de la température par le tableau suivant :

| T (K) | Pr |
|---|---|
| 300 | 0.708 |
| 350 | 0.697 |
| 400 | 0.689 |
| 450 | 0.683 |
| 500 | 0.680 |
| 550 | 0.680 |
| 600 | 0.680 |
| 650 | 0.682 |
| 700 | 0.684 |
| 750 | 0.686 |
| 800 | 0.689 |

Sur les mêmes données que l'exercice précédent, trouver une loi polynômiale $Pr = f(T)$ qui se rapproche le plus possible des données tabulées.

Comparer graphiquement les données exactes et approximées.

### Exercice 4.4 : Identification d'une formule de constante d'équilibre (identconsteq)

Pour l'exercice 2.3, on cherche à retrouver la loi $K_e(T)$ pour cela, on dispose de valeurs tabulées de $K_e$ pour certaines températures :

| T (K) | $K_e$ |
|---|---|
| 298 | $9.1\ 10^{-46}$ |
| 500 | $9.3\ 10^{-26}$ |
| 1000 | $5.9\ 10^{-11}$ |
| 1500 | $5.2\ 10^{-6}$ |
| 1800 | $2.5\ 10^{-4}$ |
| 2000 | $1.6\ 10^{-3}$ |
| 2200 | $5.4\ 10^{-3}$ |
| 2400 | $2.01\ 10^{-2}$ |
| 2500 | $3.6\ 10^{-2}$ |

En utilisant la fonction **polyfit**, retrouver la loi donnée dans l'exercice 2.3.

### Exercice 4.5 : Identification d'un coefficient de transfert (DS 2001) (coeftransfert)

On cherche à identifier le coefficient de transfert global entre un récipient sphérique rempli d'eau chaude et l'air extérieur à température ambiante. On mesure la température de l'eau (supposée parfaitement brassée) au cours du temps lors de son refroidissement. Le bilan énergétique montre que cette température est solution de l'équation différentielle :

$$\rho C V \frac{dT}{dt} + hS(T - T_\infty) = 0 \tag{13}$$

où :

| | | |
|---|---|---|
| $\rho$ | masse volumique de l'eau de l'air | $= 1000$ kg/m$^3$ |
| $C$ | capacité calorifique massique de l'eau | $= 4.18 \times 10^3$ J/kg/K |
| $h$ | coefficient de transfert recherché | en W/m$^2$/K |
| $R$ | rayon du récipient sphérique | $= 10$ cm |
| $S$ | surface du récipient sphérique | |
| $V$ | volume du récipient sphérique | |
| $T_\infty$ | Température de l'air ambiant | $= 25$ ˚C |

La mesure est disponible dans le fichier texte

`/usr/local/public/matlab/temperature.res`

contenant deux colonnes : la première représente le temps **en minutes**, la deuxième la température en ˚C.

On montre aisément que la solution de l'équation (13), qui représente le refroidissement théorique, s'écrit :

$$T(t) = T_\infty + (T_0 - T_\infty)e^{-t/\tau} \tag{14}$$

où $\tau = \rho CV/hS$ est la constante de temps, et $T_0$ est la température initiale de l'eau (on prendra $T_0 = 90$ ˚C).

1. Charger le fichier et tracer la temperature $T$ en fonction du temps $t$.
2. En écrivant l'équation (14) de façon différente, retracer les données de façon à obtenir une droite.
3. En effectuant une approximation linéaire adéquate avec la fonction **polyfit**, en déduire une estimation du coefficient de transfert $h$.

### Exercice 4.6 : Identification d'une formule de perte de charge (pdrop)

Au cours d'expérimentations effectuées sur des tubes de diverses longueurs et pour différents fluides, on a mesuré la perte de charge dans le tube.

Les résultats sont disponibles dans le fichier :

`/usr/local/public/matlab/datapdrop.res`

dont les colonnes respectives représentent :

$D$ (cm) $L$ (m) $Q$ (m$^3$/h) $\Delta p$ (Pa) $\rho$ (kg/m$^3$) $\mu$ (kg.m$^{-1}$.s$^{-1}$) V (m/s)

1. Tracer le coefficient de perte de charge
$$f = \left(\frac{D}{L}\right)\frac{\Delta p}{1/2\rho V^2}$$
en fonction du nombre de Reynolds Re= $\rho VD/\mu$ (réfléchissez au type de l'échelle à adopter).
2. Identifiez une loi de puissance entre $f$ et Re. On éliminera les points «exceptionnels» si besoin est, à l'aide de la commande **find**.
Comparez votre résultat avec la loi de Blasius (valable pour Re $< 10^5$) :
$$f = \frac{0.316}{\mathrm{Re}^{1/4}}$$

**Exercice 4.7 : Caractéristique d'une ampoule électrique**

On mesure le courant dans une ampoule électrique pour différentes tensions appliquées. On cherche à identifier une loi courant-tension non-linéaire de la forme :

$$V = RI(1 - \alpha I^2)$$

On supposera que les données expérimentales sont disposées en colonnes dans un fichier appelé **vi.txt**, la première colonne contenant les valeurs de $V$, la seconde les valeurs de $I$.

Ecrire un programme qui identifie les valeurs de $R$ et $\alpha$ à partir des données expérimentales.

**Exercice 4.8 : Vitesse de chute d'une particule (vitchute, fcdre)**

Une particule sphérique de rayon $R$ et de densité $\rho_s$ tombe dans de l'eau, de densité $\rho_e$. On cherche à calculer sa vitesse finale de chute. En régime permanent, elle est soumise à trois forces :

– son poids
– la trainée visqueuse
– la poussée d'Archimède

L'équilibre des trois forces s'écrit :

$$\underbrace{\frac{1}{2}\rho_e u^2 \pi R^2 C_D(u)}_{\text{trainée visqueuse}} = \underbrace{\frac{4}{3}\pi R^3 (\rho_s - \rho_e) g}_{\text{Archimède}-\text{poids}} \tag{15}$$

L'inconnue est $u$ et ne peut être déterminée simplement car l'expression du coefficient de trainée $C_D$ dépend de manière compliquée du nombre de Reynolds $\mathrm{Re} = 2\rho_e u R/\eta$, et donc de la vitesse $u$. La valeur de $C_D$ est donnée en fonction du Reynolds Re par le tableau suivant :

| Re | $C_D$ |
|---|---|
| 10 | 4 |
| 40 | 2 |
| 100 | 1.2 |
| 400 | 0.6 |
| 1000 | 0.5 |
| 2000 | 0.4 |

Au lieu de prendre $u$ comme inconnue, on cherche le Reynolds Re.

1. Montrer que l'équilibre des forces (15) peut se réécrire sous la forme :

$$f(\mathrm{Re}) = \mathrm{Re}^2 C_D(\mathrm{Re}) - K = 0,$$

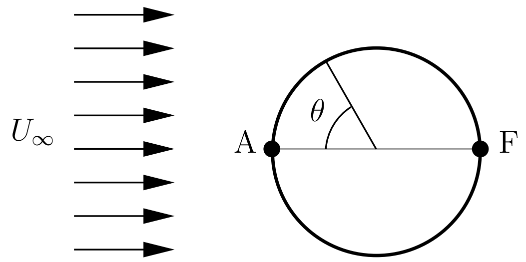
   où $K$ est une constante que l'on explicitera en fonction des différents paramètres physiques.
2. Programmer cette fonction $f$ dans une fonction MATLAB. On évaluera le coefficient de trainée $C_D$ par interpolation sur les valeurs du tableau ci-dessus.
3. En déduire la vitesse de chute $u$ en utilisant la fonction **fzero**. Comparer à l'expression obtenue par la formule de Stokes $C_D = 24/\mathrm{Re}$.

Les données numériques sont les suivantes :
$\rho_e = 1000$ kg/m$^3$
$\rho_s = 2800$ kg/m$^3$
$R = 400\ \mu$m
$\eta = 10^{-3}$ Pa.s (viscosité dynamique de l'eau)

# 5 Intégration. Equations différentielles

### Exercice 5.1 : Force de traînée sur un cylindre

On effectue dans une soufflerie (celle de l'école) des mesures de pression à la surface d'un cylindre soumis à un écoulement perpendiculaire à son axe. Les mesures sont effectuées tous les 6° entre le bord d'attaque A ($\theta = 0$) et le bord de fuite F ($\theta = \pi$).




La force de traînée totale sur le cylindre peut être exprimée sous forme adimensionnelle par le coefficient de traînée qu'on montre égal à :

$$C_D = \int_0^\pi \frac{p(\theta) - p_\infty}{p(\theta = 0) - p_\infty} \cos\theta \, d\theta$$

où $p(\theta)$ est la pression mesurée à l'angle $\theta$, et $p_\infty$ la pression infini amont.

Les résultats[2] sont disponibles dans un fichier `pres.txt` :

– Colonne 1 : valeurs de $\theta$ (**attention en degrés**) tous les 6 degrés entre 0° et 180°.
– Colonne 2 : valeurs de $p(\theta) - p_\infty$ en Pa.

1. Ecrire un programme MATLAB qui calcule le coefficient $C_D$ par la méthode des trapèzes. **Attention, il faut convertir $\theta$ en radians.**
2. Entrez sur Campus la valeur numérique de $C_D$ obtenue.

### Exercice 5.2 : Oscillateur de Duffing

L'oscillateur de Duffing est un modèle simple des oscillations de flexion d'une poutre comprimée à ses deux extrémités, et excitée par une force sinusoïdale. Pour une excitation suffisamment forte, les oscillations sont chaotiques (Fig. 6).

L'oscillateur de Duffing est régi par l'équation différentielle :

$$\ddot{y} + \alpha\dot{y} - (y - y^3) = \delta \cos t$$

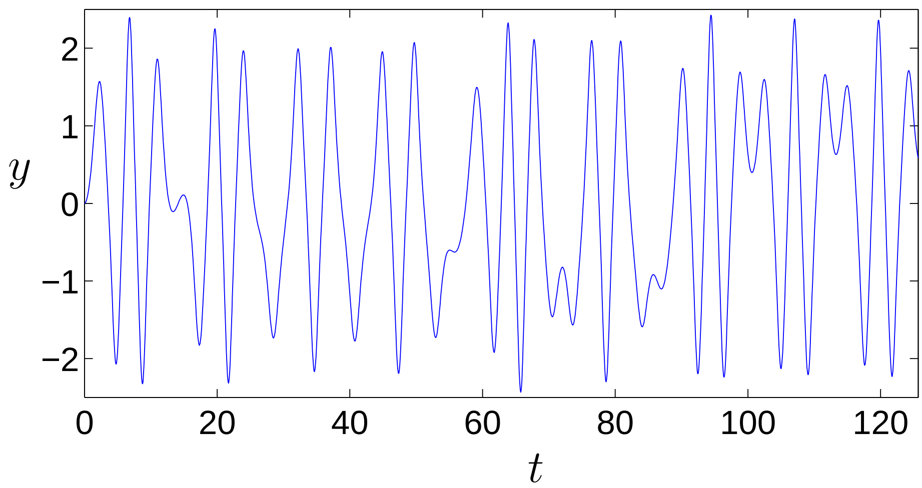



FIG. 6 – Oscillations chaotiques de l'oscillateur de Duffing.

Ecrire un programme MATLAB utilisant `ode45` pour résoudre cette EDO pour $t \in [0, 40\pi]$ et qui trace $y$ en fonction de $t$. On prendra $\alpha = 0.03$ et $\delta = 0.9$.

[2]Ce sont de vraies mesures réalisées au labo de TP transferts de l'EMAC ...