

TDs de mécanique des fluides.

Olivier LOUISNARD

19 septembre 2019

Cette création est mise à disposition selon le Contrat Paternité-Pas d'Utilisation
Commerciale-Pas de Modification 2.0 France disponible en ligne
[http ://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.0/fr/](http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.0/fr/) ou par courrier postal à
Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California 94105,
USA.



Table des matières

1	Hydrostatique	7
1.1	Mesure de la densité d'une huile	7
1.2	Flottation à une interface	7
1.3	Densimètre à flotteur	8
1.4	Densimètre à ressort (DS IFI 2009)	8
1.5	Tube rempli de plusieurs fluides (rattrapage 2009)	9
1.6	Flottation d'une barre en bois (d'après DS IFI 2002)	10
1.7	Accéléromètre hydrostatique	10
1.8	Miroirs liquides	11
1.9	Force d'Archimède en référentiel non-galiléen (d'après DS IFI 1998)	12
1.10	Trop-plein (DS IFI 2004)	13
1.11	Dimensionnement d'un barrage poids	14
1.12	Remplissage d'un récipient fermé. (DS IFI 2010)	14
1.13	Clapet sphérique	15
1.14	Bouée conique.	15
1.15	Oscillations verticales d'une bouée (DS IFI 2009).	16
1.16	Variations de pression dans une colonne d'air	16
1.17	Expérience de Torricelli	17
2	Applications de la formule de Bernoulli	19
2.1	Convergent	19
2.2	Tubes piezométriques et de Pitot	19
2.3	Venturi (DS IFI 2003)	20
2.4	Division d'un écoulement.	21

2.5 . Siphon	21
2.6 . Antenne de Prandtl - Mesure de vitesse	22
2.7 . Clepsydre	23
2.8 . Vase de Tantale	24
2.9 . Manomètre à mercure	24
2.10 . Couche liquide au-dessus d'un obstacle	25
2.11 . Aspiration par un venturi (DS IFI 2012)	26
2.12 . Exemple d'écoulement instationnaire	26
2.13 . Oscillations dans un tube en U	27
3 Forces exercées par un fluide sur un corps solide.	29
3.1 . Effort sur un coude (DS IFI 2003)	29
3.2 . Effort sur une lance d'incendie.	29
3.3 . Effort sur une tuyauterie (rattrapage 2001).	30
3.4 . Pommeau de douche (DS IFI 2006)	30
3.5 . Force sur un cône	31
3.6 . Réaction d'un jet d'eau	32
3.7 . Jet incident sur un plan incliné	33
3.8 . Tondeuse à gazon sur coussin d'air (DS IFI 2009)	34
3.9 . Vanne de décharge	36
3.10 . Force sur un obstacle dans une rivière (DS IFI 2010).	36
3.11 . Approximation de la traînée sur un corps	37
3.12 . Eolienne	39
4 Pertes et gains de charge.	41
4.1 . Pompe	41
4.2 . Turbine de barrage	41

4.3 . Propulsion par jet	42
4.4 . Mesure de perte de charge	42
4.5 . Différence de charge aux bornes d'une pompe (DS IFI 2005)	43
4.6 . Pompe sur une tuyauterie avec pertes de charge (oral rattrapage IFI 2016)	44
4.7 . Dimensionnement d'une pompe d'arrosage	45
4.8 . Ressaut hydraulique (DS IFI 2008)	45
4.9 . Perte de charge dans un élargissement brusque	46
4.10 . Pompage d'un bac dans un autre	47
4.11 . Propulsion d'un bateau	48
4.12 . Tondeuse à gazon (suite)	49
4.13 . Ecoulement forcé par de l'air sous pression (DS IFI 2009) .	49
4.14 . Réseau de fluide (DS IFI 2010).	50
4.15 . Citerne (rattrapage IFI 2011).	51
4.16 . Choix d'une pompe.	53
4.17 . Initiation aux réseaux de fluides.	53
4.18 . Tubes piézométriques sur une conduite (DS IFI 2019). . . .	55
4.19 . Réseau urbain (adapté de DS IFI 2012)	57
4.20 . Remplissage d'un wagon-citerne (d'après DS IFI 2013) . . .	61
4.21 . Circuit de refroidissement tertiaire d'une centrale nucléaire.	63
4.22 . By-pass.	65
4.23 . Barrage à stockage gravitaire (d'après DS IFI 2017)	67
5 Equations de Navier-Stokes. Ecoulements rampants.	69
5.1 . Ecoulement de Couette	69
5.2 . Ecoulement de Poiseuille	69
5.3 . Ecoulement de Couette-Poiseuille cylindrique	70

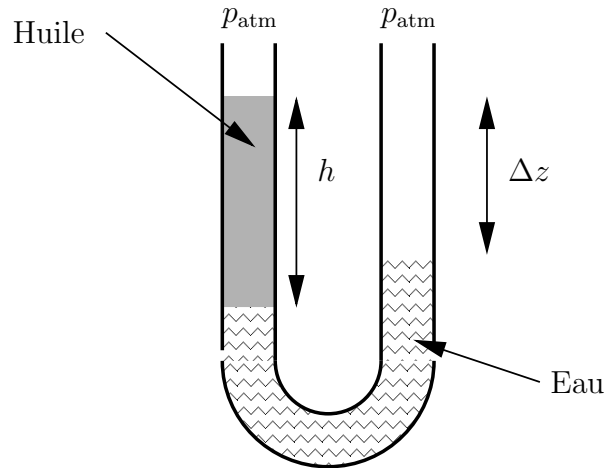
5.4 . Ecoulement de Couette circulaire	71
5.5 . Ruissellement laminaire	72
5.6 . Amortisseur hydraulique	73
5.7 . Ecoulement de Couette instationnaire	74
5.8 . Ecoulement radial entre deux disques (d'après DS IFI 2014)	74
5.9 . Courants d'eau engendrés par du vent.	77
5.10 . Ecoulement laminaire dans un tube de section quelconque (DS IFI 2013)	78
5.11 . Viscosimètre plan-plan (DS IFI 2015)	79
5.12 . Filage textile à l'eau (DS IFI 2016)	80
6 Couches limites	82
6.1 . Epaisseurs de couche limite. Transition laminaire-turbulent .	82
6.2 . Longueur d'établissement dans un tube	82
6.3 . Déviation des lignes de courant	82
6.4 . Soufflerie	82
6.5 . Reynolds de transition laminaire-turbulent	83
6.6 . Théorie de Blasius pour la plaque plane	83
6.7 . Grandeurs intégrales dans la couche limite laminaire	84
6.8 . Grandeurs intégrales dans la couche limite turbulente	85
6.9 . Trainée sur une aile d'avion	86
6.10 . Trainée sur un coureur	86
6.11 . Force sur un château d'eau (DS IFI 2016)	87
6.12 . Trainée additionnelle par un coffre de toit (DS IFI 2013) .	87
6.13 . Vitesse terminale d'une sphère en chute libre dans l'air (oral rattrapage IFI 2016)	88
6.14 . Perte de charge additionnelle liée à des inclusions. Echan- geurs. (problème de synthèse)	90

6.15 . Trainée sur une potence d'éclairage (Rattrapage IFI 2018)	91
6.16 . Fluidisation d'une particule solide	94
A Coordonnées cylindriques	95

1 Hydrostatique

Exercice 1.1 : Mesure de la densité d'une huile

Un tube en U dont les branches sont très longues, de section $s = 1 \text{ cm}^2$, est ouvert aux extrémités. Il contient initialement de l'eau. D'un côté, on verse 10 cm^3 d'huile. La différence de niveau entre les surfaces libres est $\Delta z = 15 \text{ mm}$.



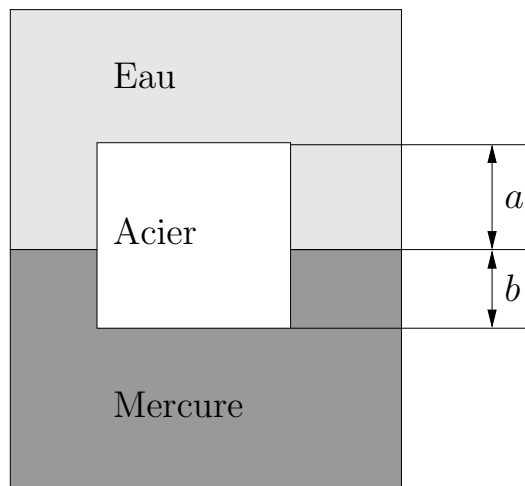
Calculer la densité de cette huile.

Rappel : la densité relative d'un corps A par rapport à un autre corps B (pris pour référence) est le rapport des masses volumiques ρ et ρ' respectivement de A et B qui occupent le même volume V dans les mêmes conditions de température et de pression.

Pour les solides et les liquides, le corps de référence choisi est l'eau. Pour les gaz, c'est l'air.

Exercice 1.2 : Flottation à une interface

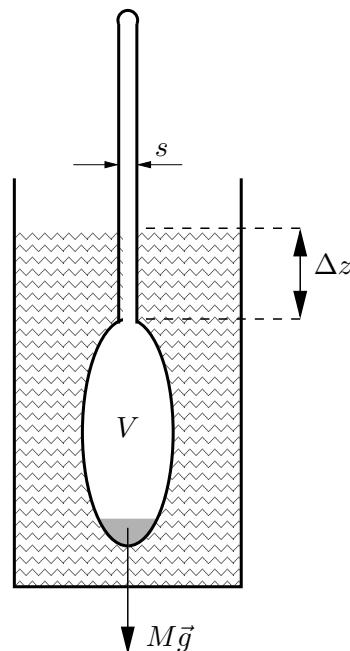
Un bloc d'acier parallélépipédique «flotte» à une interface eau-mercure comme indiqué ci-dessous. On note d_A et d_M les densités respectives de l'acier et du mercure.



1. Calculer le rapport des distances b/a .
2. Application numérique : $d_A = 7.85$, $d_M = 13$.

Exercice 1.3 : Densimètre à flotteur

Soit le densimètre (ou encore aréomètre) constitué d'une tige AB de section constante s soudée en A à une carène lestée. On notera M la masse totale de l'instrument et V le volume de la carène (lest compris).



Exprimer la masse volumique du fluide dans lequel est plongé l'appareil en fonction de la longueur immergée de la tige Δz .

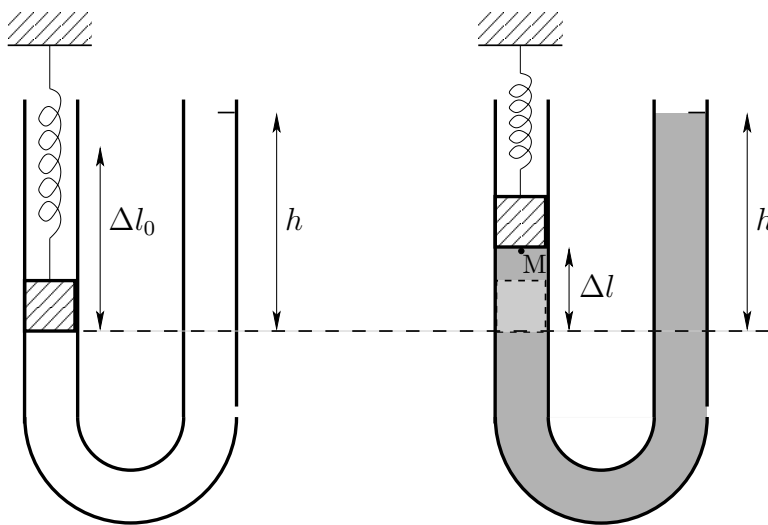
Exercice 1.4 : Densimètre à ressort (DS IFI 2009)

On imagine le système suivant pour mesurer la densité d'un fluide : un tube en U de section S est bouché d'un côté par un bouchon étanche de masse M , relié à un ressort, de raideur k et de longueur L au repos, dont l'autre extrémité est fixe. La branche de droite du tube est graduée à une hauteur h au-dessus de la position d'équilibre du bouchon en l'absence de fluide. On note Δl_0 l'allongement initial du ressort en l'absence de fluide, sous l'influence du poids du bouchon.

1. En écrivant le bilan des forces sur la masse M lorsque le tube est vide, calculer Δl_0 en fonction de M et k (ce n'est pas encore de la mécanique des fluides...).

On remplit ensuite le tube en U avec le fluide à caractériser jusqu'au trait de graduation, et on note Δl la hauteur dont remonte la masse M .

2. Ecrire le bilan des forces sur la masse M (il y en a 4). On notera p_M la pression dans le fluide au point M , et p_{atm} la pression atmosphérique.
3. Ecrire l'expression de p_M à partir de la loi de l'hydrostatique et, en utilisant la question 1, en déduire ρ en fonction de k , S , Δl et h .
4. On donne $h = 1\text{m}$, $D = 3\text{ cm}$ (diamètre du tube), $k = 0.1\text{ N/mm}$, $\Delta l = 5\text{ cm}$. Calculer ρ .

**Exercice 1.5 : Tube rempli de plusieurs fluides (rattrapage 2009)**

On considère le tube de la figure 1. La pression au niveau du point E est la pression atmosphérique. Les densités des différents fluides sont indiquées sur la figure.

1. Exprimez la différence de pression $p_A - p_{\text{atm}}$ en fonction de ρ masse volumique de l'eau, g pesanteur, et les différentes hauteurs indiquées sur la figure.
2. Application numérique : $h = 45\text{ cm}$, $h_1 = 30\text{ cm}$, $h_2 = 15\text{ cm}$, $h_3 = 40\text{ cm}$.

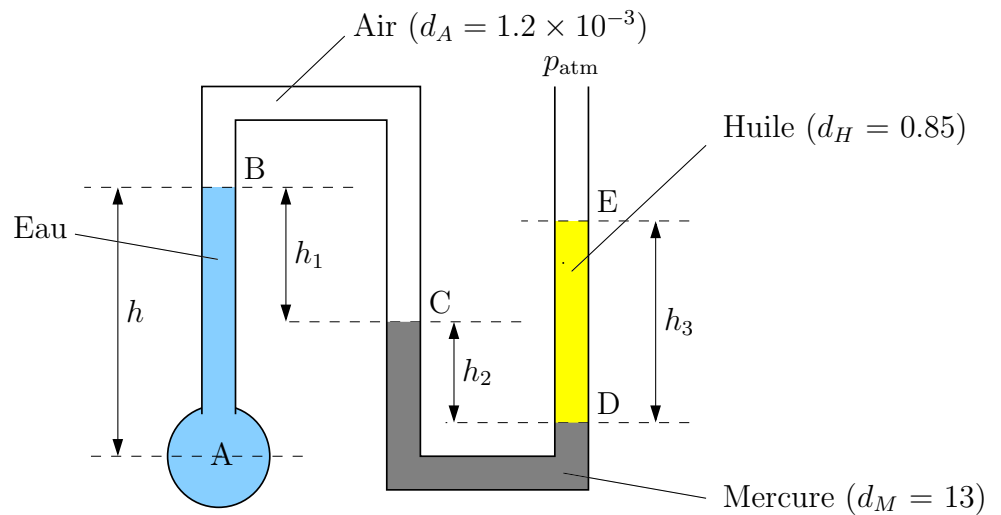
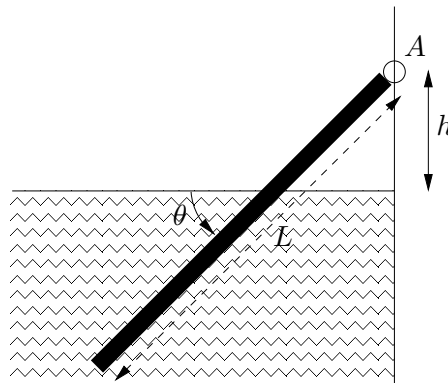


FIGURE 1 – Tubes

Exercice 1.6 : Flottation d'une barre en bois (d'après DS IFI 2002)

Une barre mince de longueur L , constituée par un matériau plus léger que l'eau, est accrochée à un mur en un point A , autour duquel elle peut tourner. L'autre extrémité de la barre plonge dans l'eau. Le point A est à une hauteur h par rapport au niveau de l'eau. On notera d la densité du matériau.

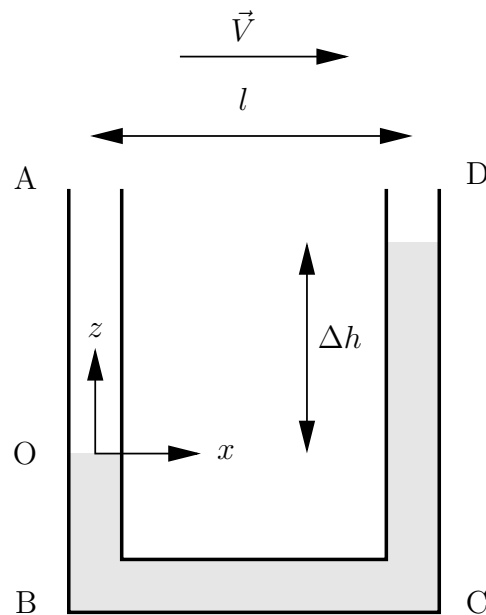


1. En écrivant l'équilibre des moments, calculer l'inclinaison θ de la barre.
2. Pour quelle valeur critique du rapport h/L la barre tombe-t-elle à la verticale ?
3. Application numérique : calculer θ pour $d = 0.65$, $h = 1$ m, $L = 3$ m.

Exercice 1.7 : Accéléromètre hydrostatique

Pour vérifier le bon fonctionnement des dispositifs de freinage d'une automobile, on

dispose à bord d'un accéléromètre constitué par un tube ABCD dont les branches AB et CD sont verticales et dont la branche BC, horizontale et de longueur $l = 20$ cm, est parallèle au vecteur vitesse.



Pendant un essai de freinage à accélération négative constante, la différence de niveau qui s'établit entre les branches AB et CD a pour valeur $\Delta h = 12$ cm.

Quelle est l'accélération de la voiture ?

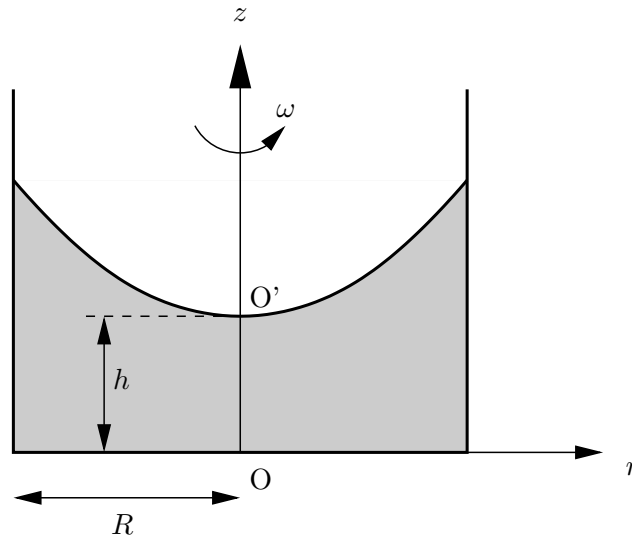
Exercice 1.8 : Miroirs liquides

Il est difficile et coûteux de tailler et polir des galettes de verre massif de grande taille en une parabole parfaite. De plus, même bien taillés, les miroirs se déforment sous l'effet de la température et au-delà d'une certaine taille, ils plient sous leur propre poids !

Le technique des miroirs liquides consiste à mettre en rotation à vitesse constante une cuve remplie de *mercure liquide*. La rotation du liquide réfléchissant donne à la surface la forme d'une parabole parfaite, qui ne nécessite aucun polissage. En revanche, il est impératif de supprimer toute oscillation car sinon, la surface du mercure se riderait sous l'effet des vibrations. Cette technique a permis à la NASA de réaliser un miroir de 3 mètre de diamètre.

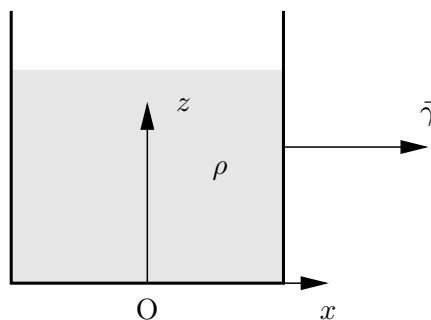
1. Calculer l'accélération d'entraînement en un point de coordonnées cylindriques (r, z) .
2. A partir de l'équation de l'hydrostatique en référentiel non galiléen, calculer le champ de pression dans le liquide, et montrer que les isobares (donc en particulier la surface libre) sont des paraboloides. On notera R le rayon de la cuve et ω sa vitesse de rotation. On prendra l'origine en O' .

3. En supposant le volume de mercure V identique lorsque la cuve est immobile ou qu'elle tourne, déterminer la hauteur $h = OO'$ en fonction de la hauteur initiale de liquide h_0 .
4. (Question de réflexion)
 - Comment le liquide est-il mis en mouvement
 - De quelle(s) propriété(s) physique(s) dépend à votre avis le temps pour arriver en régime permanent ?
 - vers où se déplacerait une bulle d'air dans le liquide en rotation ?



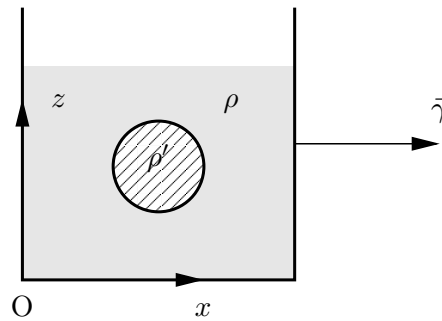
Exercice 1.9 : Force d'Archimède en référentiel non-galiléen (d'après DS IFI 1998)

Une cuve remplie d'un liquide de masse volumique ρ est soumise à une accélération constante et horizontale.



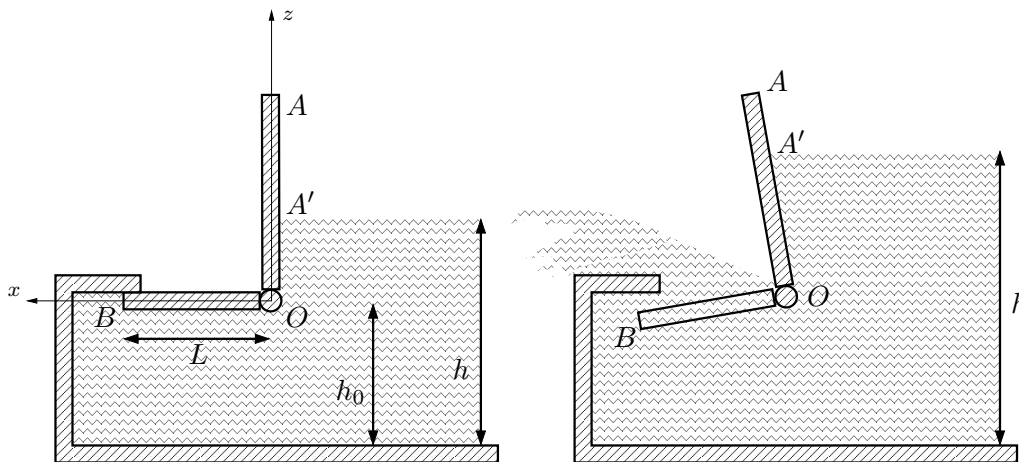
1. Quelle est la forme et la direction de la surface libre ?
2. Une bille de masse volumique ρ' est maintenue immobile, complètement immergée au sein du fluide. A $t = 0$, on libère la bille. En faisant un bilan des

forces appliquées à la bille, déterminer son accélération à $t = 0$ dans le repère mobile. Discuter du mouvement de la bille suivant les valeurs respectives de ρ et ρ' .



Exercice 1.10 : Trop-plein (DS IFI 2004)

Une porte de trop-plein est représentée ci-dessous. Lorsque le niveau de l'eau h est trop haut, la porte AOB s'ouvre en tournant autour d'un axe perpendiculaire au dessin passant par le point O , et laisse passer l'eau. On note A' le point de la surface de l'eau. On négligera l'épaisseur de la porte.



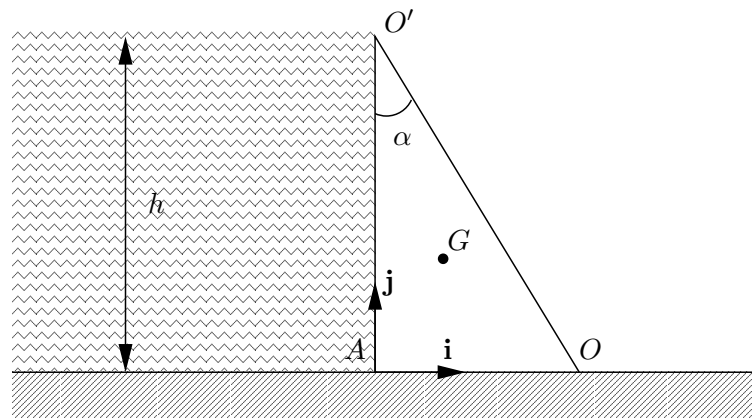
On pourra poser $H = h - h_0$.

1. Expliquer sommairement pourquoi la porte bascule lorsque la hauteur d'eau est trop élevée.
2. Enumérer et tracer sommairement les forces agissant sur la porte. On négligera ensuite le poids de la porte.
3. Calculer le moment en O des forces de pression exercées par l'eau et l'air sur la porte.
4. En négligeant le poids de la porte, en déduire la hauteur h de liquide pour laquelle la porte bascule. Le résultat dépend-il de la pression atmosphérique ?

Exercice 1.11 : Dimensionnement d'un barrage poids

Il existe plusieurs types de barrages adaptés à la structure du sol et du sous-sol que l'on peut classer en deux grandes familles : les barrages poids qui stabilisent l'eau uniquement par leur masse, et les barrages arc-boutants qui s'appuient sur les bords.

Nous allons dans cet exercice calculer la taille d'un barrage poids triangulaire, de largeur l , de hauteur h et d'angle au sommet α .



On supposera la pression atmosphérique négligeable dans tout l'exercice. On notera $G\left(\frac{h}{3} \tan \alpha, \frac{h}{3}, 0\right)$ le centre de gravité du barrage. La densité du béton est 2.2

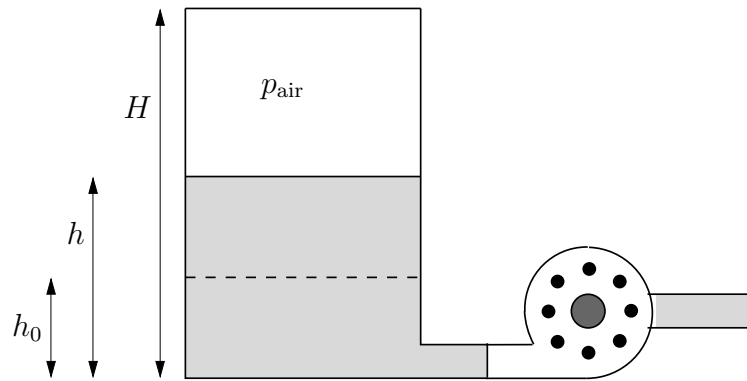
1. Dessiner les différentes forces exercées sur le barrage.
2. Calculer la résultante des forces de pression exercées par l'eau ainsi la position du centre de poussée de ces forces.
3. En étudiant l'équilibre du barrage vis-à-vis de la rotation autour du point O, calculer l'angle α minimum pour que le barrage retienne une masse d'eau de profondeur h .

Exercice 1.12 : Remplissage d'un récipient fermé. (DS IFI 2010)

Un récipient fermé de hauteur H et de section S est initialement rempli d'eau (hauteur h_0) et d'air à pression atmosphérique. En branchant une pompe à l'entrée, on ajoute de l'eau dans le récipient, ce qui comprime l'air. On note h le niveau de l'eau.

On supposera que l'air se comporte comme un gaz parfait, et que la compression est isotherme.

D'après les données techniques de la pompe, on sait que la pompe ne débite plus dès que la pression à la sortie dépasse la valeur p_{\max} .



Quelle est alors hauteur de liquide h dans le récipient ?

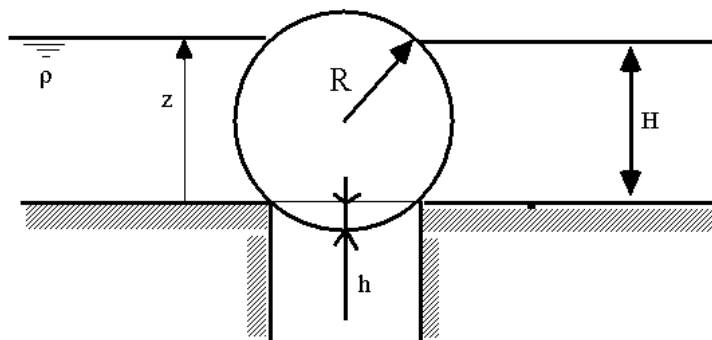
On pourra avantageusement utiliser les nombres adimensionnels $P = p_{\max}/p_{\text{atm}}$, $\beta = p_{\text{atm}}/(\rho g H)$, $\alpha = 1 - h/H$ et $\alpha_0 = 1 - h_0/H$ pour la résolution.

A.N. : $p_{\max} = 4 \text{ bar}$, $H = 3 \text{ m}$, $h_0 = 1 \text{ m}$. Calculer la hauteur h , et la pression de l'air au moment de l'arrêt.

Exercice 1.13 : Clapet sphérique

Il est parfois nécessaire de réguler la hauteur d'un bain ou de pouvoir vider une cuve de son contenu à l'exception des impuretés surnageantes. C'est le cas, par exemple d'un convertisseur en métallurgie, où l'on veut récupérer l'acier et le séparer du laitier (ensemble des impuretés) de densité plus faible. Pour cela, on utilise des billes de densité connue qui fonctionnent suivant le principe décrit dans cet exercice.

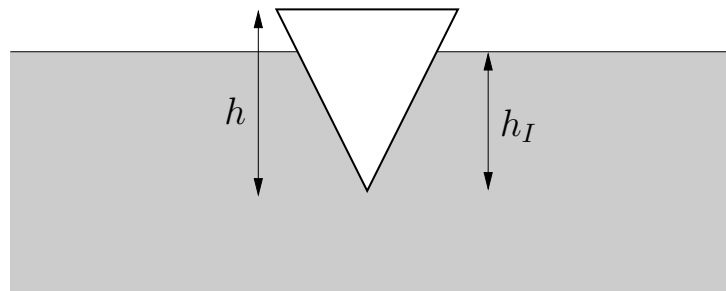
Un flotteur sphérique de rayon R et de masse M vient obstruer, au fond d'un récipient, un orifice circulaire dans lequel il s'enfonce d'une hauteur h . Ce récipient est rempli d'un liquide de masse volumique ρ jusqu'à une hauteur H .



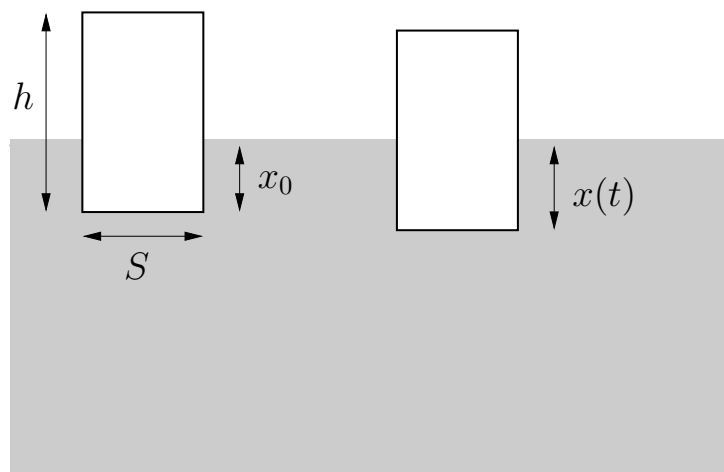
Discutez les possibilités d'obturation, selon la profondeur H du liquide, sa masse volumique ρ et de la masse M de la bille.

Exercice 1.14 : Bouée conique.

Une bouée conique de densité $d < 1$ et de hauteur h flotte à la surface de l'eau. Calculer la hauteur immergée h_I en fonction de h et d .

**Exercice 1.15 : Oscillations verticales d'une bouée (DS IFI 2009).**

On considère une bouée de forme cylindrique de hauteur h , de section S et de densité $d < 1$, flottant à la surface de l'eau.



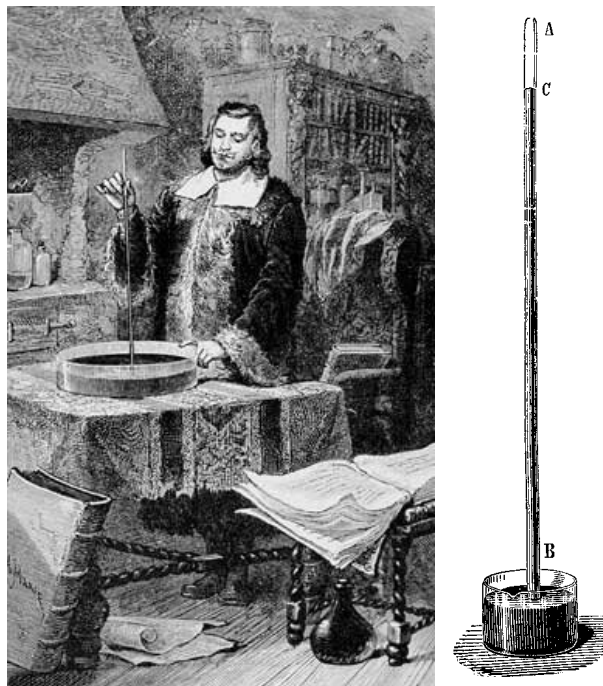
1. Calculer la hauteur immergée x_0 de la bouée lorsqu'elle est en équilibre.
2. On déplace légèrement la bouée par rapport à sa position d'équilibre et on la lâche brusquement. En notant $x(t)$ la hauteur de bouée immergée variant au cours du temps, établir l'équation différentielle linéaire du second ordre sur $x(t)$ régissant les oscillations de la bouée. On admettra que lors du mouvement de la bouée, celle-ci subit les mêmes forces qu'en statique.
3. En déduire la période d'oscillation.
4. A.N. : on donne $h = 80$ cm, $d = 0.2$.

Exercice 1.16 : Variations de pression dans une colonne d'air

1. (rappel de cours) Intégrer l'équation de l'hydrostatique sur une colonne d'air, considéré comme un gaz parfait isotherme à température $T_0 = 300$ K. On donne la masse molaire de l'air $M_a = 28.8$ g/mol. On notera $p(z = 0) = p_0$.
2. Exprimer le résultat en fonction de la grandeur $z_0 = RT_0/M_ag$. A quoi est homogène cette grandeur ? La calculer en unité S.I.
3. Par un développement limité de l'expression obtenue au 1, comparer le résultat précédent à celui obtenu si l'air était considéré comme incompressible. Qu'en concluez-vous ?
4. Dans cette approximation, quelle est, rapportée à son poids, l'amplitude de la force d'Archimède exercée sur un homme dans l'air au niveau du sol ?

Exercice 1.17 : Expérience de Torricelli

Torricelli a fait l'expérience suivante, en 1644 : on remplit une cuve de mercure ainsi qu'un tube, fermé à une extrémité, d'environ 1 m de long, à ras bord. On bouche ce dernier avec le pouce, puis on le retourne en le plongeant dans le bac de mercure. On enlève alors le pouce : le mercure tombe pour former systématiquement une colonne BC de 76 cm environ, et laisse apparaître un espace apparemment vide AC au-dessus.



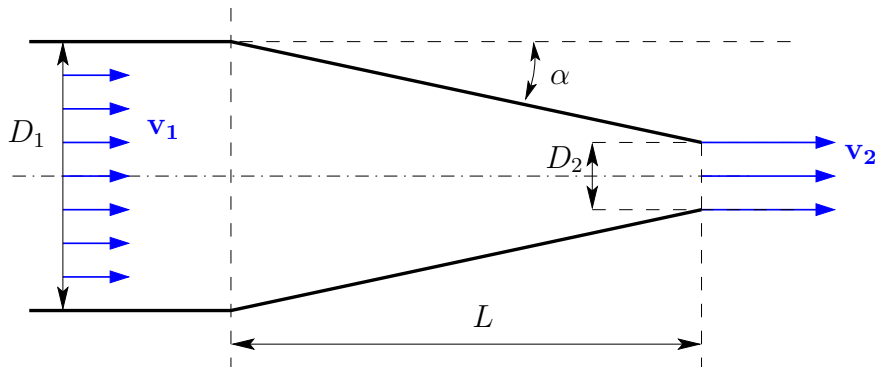
1. Quelle est la pression dans la colonne de mercure à une altitude h au-dessus de la surface libre dans le bac ?
2. Quelle est la nature de l'espace vide au dessus du mercure ? Que vaut la pression au niveau de l'interface ? Vérifiez votre assertion à l'aide de la question 1. (tension de vapeur du mercure à 20°C : 0.00163 mbar, masse volumique $13\,546$ kg m⁻³)

3. Quelle est la force qui fait monter le mercure ? A quelle mesure peut servir cette expérience ?
4. L'expérience fut reprise en 1663 par Huyghens, qui avait pris soin au préalable de dégazer au mieux le mercure. Dans certaines expériences, au lieu de laisser un espace vide dans le haut du tube, le mercure occupait curieusement tout l'espace du tube, formant une colonne de mercure pouvant atteindre jusqu'à 1m50 de hauteur, au lieu des 76 cm précédents. Quelle est alors la pression en haut du tube ? Quelle conclusion non-intuitive suggère votre résultat ? Comment est-ce physiquement explicable ?

2 Applications de la formule de Bernoulli

Exercice 2.1 : Convergent

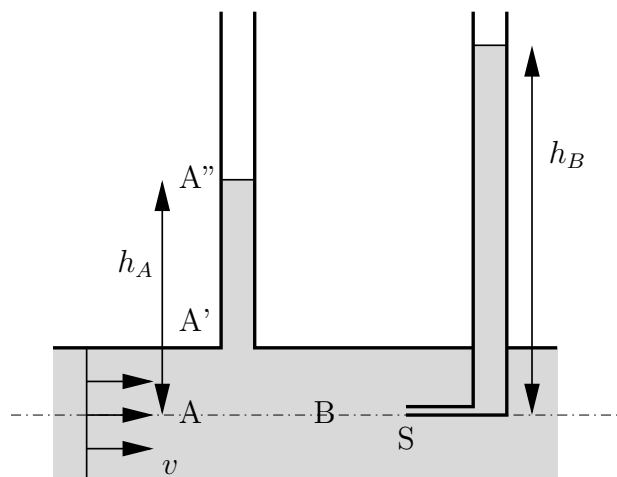
On veut accélérer de l'eau dans une conduite de telle sorte que sa vitesse soit multipliée par un facteur K . Pour cela, la conduite comporte un convergent caractérisé par l'angle α .



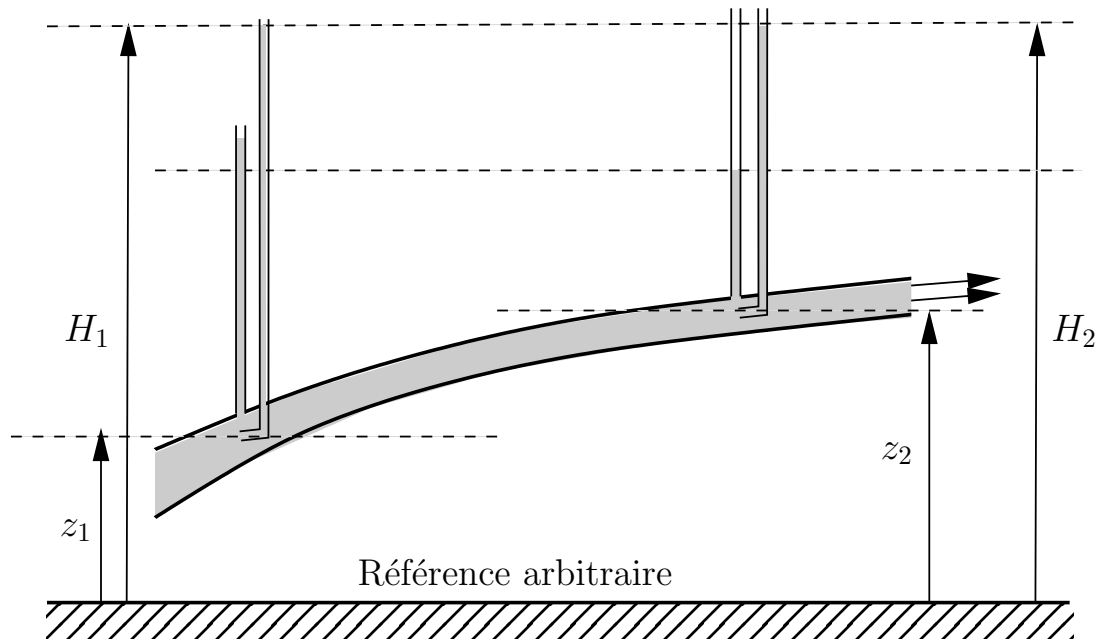
1. Quelle doit être la longueur L de ce convergent ?
2. Si le convergent débouche à l'air libre, calculer la différence de pression $p_1 - p_{\text{atm}}$ entre l'entrée et la sortie.
3. A.N. : On donne $K = 1.5$, $D_1 = 200 \text{ mm}$ et $\alpha = 10^\circ$, $Q = 100 \text{ L s}^{-1}$.

Exercice 2.2 : Tubes piezométriques et de Pitot

On considère deux tubes disposés sur un écoulement comme suit : le tube piezométrique est disposé sur la paroi de la conduite, et le tube de Pitot consiste en un orifice très petit faisant face à l'écoulement. Les deux extrémités hautes des tubes sont en contact avec l'atmosphère. On mesure la montée de fluide dans les deux tubes h_A et h_B .

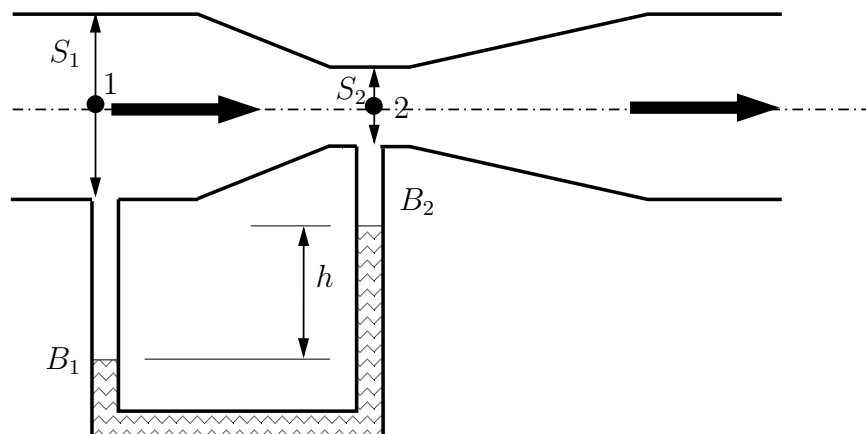


1. Quelles grandeurs mesurent les hauteurs h_A et h_B ? Que représente la différence $h_B - h_A$?
2. Expliquer le dessin ci-dessous et indiquer les valeurs des diverses différences de hauteur. Quel principe physique traduit le fait que $H_2 = H_1$? Ce principe est-il vérifié dans la réalité?



Exercice 2.3 : Venturi (DS IFI 2003)

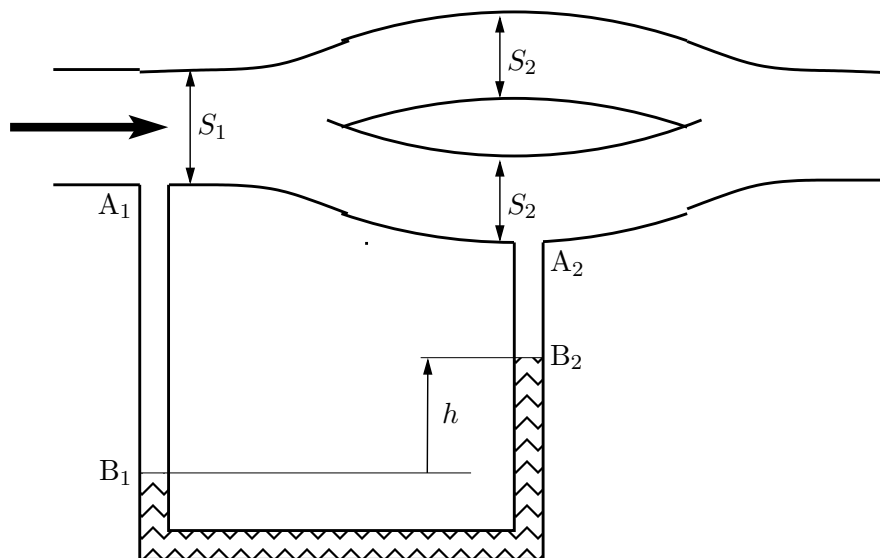
On considère le système suivant, appelé Venturi, composé d'un rétrécissement suivi d'un élargissement. Les points 1 et 2 sont branchés sur un tube en U contenant du mercure. Un fluide de masse volumique ρ traverse le système avec un débit volumique Q .



1. Exprimer la différence de pression entre les points 1 et 2, tout d'abord en fonction de la hauteur h , puis en fonction du débit Q . On rappelle que dans la direction transverse à un écoulement parallèle, la pression varie de façon hydrostatique.
2. En déduire une expression du débit Q en fonction de la différence de niveau h mesurée dans le tube en U.
3. Application numérique : $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, $\rho_{\text{Hg}} = 13000 \text{ kg/m}^3$, $h=10 \text{ cm}$, $D_1=1 \text{ cm}$ et $D_2=5 \text{ mm}$.

Exercice 2.4 : Division d'un écoulement.

Un écoulement incident d'un fluide de masse volumique ρ dans une tuyauterie de section S_1 se divise localement dans deux tuyauteries de sections S_2 . On suppose que tout l'écoulement s'effectue dans un plan horizontal. On note ρ_M la masse volumique du fluide dans le tube en U.

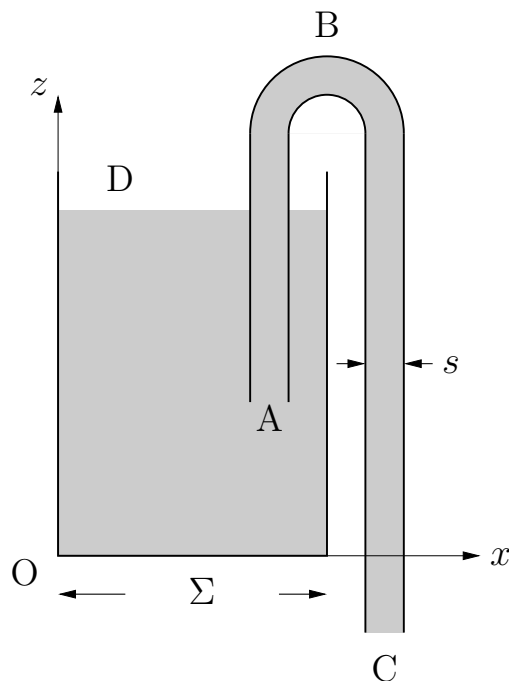


1. Exprimez la hauteur h , comptée positivement vers le haut, en fonction du débit volumique entrant Q , des densités des fluides et des sections S_1 et S_2 .
2. La hauteur h peut-elle être nulle ? Si oui dans quelles conditions ?

Exercice 2.5 : Siphon

On se propose de vider partiellement un réservoir parallélépipédique contenant un liquide de masse volumique ρ au moyen d'un siphon, tube de section constante s . On note Σ la section du réservoir.

Soient A le point d'entrée du siphon, B le point le plus haut du siphon, C la sortie du siphon, D un point de la surface libre dans le réservoir ; z_A, z_B, z_C, z_D les coordonnées correspondantes. La surface libre dans le réservoir et l'extrémité C du siphon sont à la pression atmosphérique p_a .



1. Considérant que $s \ll \Sigma$, que peut-on dire de la vitesse au point C ?
2. Calculer la vitesse du fluide à la sortie du siphon. En déduire une condition pour que le fluide s'écoule.
3. Calculer les pressions p_A et p_B dans le fluide aux points A et B ? Que faut-il faire pour amorcer le siphon ? La hauteur du point B peut-elle être quelconque ?
4. Etudier les variations de z_D en fonction du temps.

A.N. L'origine des ordonnées est prise sur le fond du réservoir.

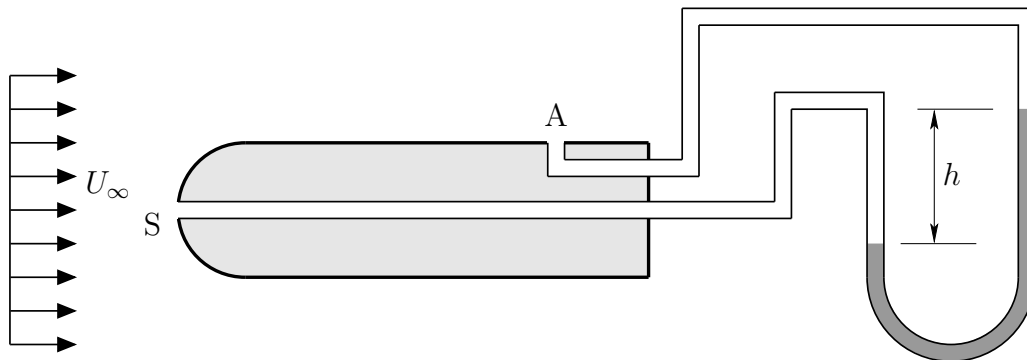
- $z_A = 5 \text{ cm}$; $z_B = 70 \text{ cm}$; $z_C = -10 \text{ cm}$
- à l'instant initial : $z_D = 60 \text{ cm}$
- $\Sigma = 1 \text{ m}^2$; $s = 1 \text{ cm}^2$
- $\rho = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$; $g = 9.8 \text{ m.s}^{-2}$

Exercice 2.6 : Antenne de Prandtl - Mesure de vitesse

L'antenne de Prandtl, appelée aussi communément "tube de Pitot", est une application directe de l'équation de Bernoulli. En effet, il permet de mesurer la vitesse d'un écoulement fluide à partir d'une mesure de pression. Dans de nombreux cas pratiques, l'antenne de Prandtl est utilisé pour mesurer la vitesse d'un véhicule (bateau, avion) dans un fluide supposé immobile.

Le dispositif est constitué de deux tubes coaxiaux. Le tube intérieur est percé d'une ouverture S à son extrémité, placée face à l'écoulement et l'autre tube est percé d'une série de petits orifices A. Un manomètre différentiel, ici un tube en U rempli

d'un liquide, est relié à chacun des deux tubes, et permet de mesurer la différence de pression qui existe entre les points S et A, en lisant la hauteur h .



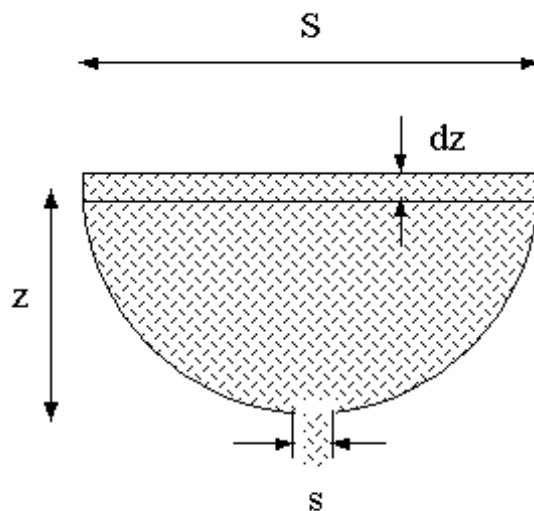
Exprimer la vitesse du fluide incident V_∞ en fonction de la pression différentielle $\Delta p = p_S - p_A$, puis en fonction de h . Avant tout calcul on essaiera de tracer intuitivement les lignes de courant.

On notera ρ la densité du fluide dont on mesure la vitesse, et ρ_M la masse volumique du fluide dans le tube en U.

Application numérique : trouvez une relation numérique entre la vitesse exprimée en m/s et la hauteur h exprimée en mm, lorsque les fluides sont respectivement de l'air et de l'eau. Cette expression sera utilisée dans le TP de soufflerie.

Exercice 2.7 : Clepsydre

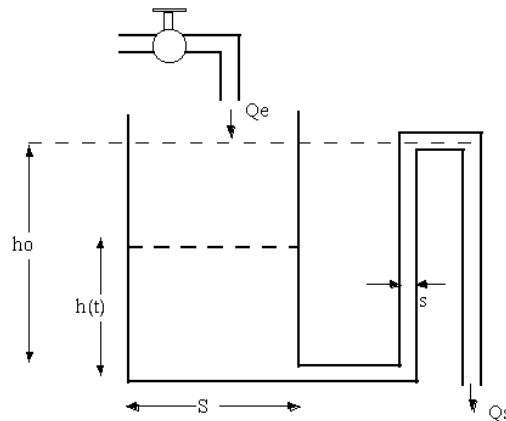
Soit un récipient se vidant par un orifice percé au fond et dont la section horizontale varie, en fonction de la cote au-dessus de l'orifice, suivant une loi monôme $S(z) = Kz^n$, où n peut-être quelconque.



1. Exprimer le temps de vidange entre deux valeurs de la cote z (loi de vidange).
2. En 2300 avant J.C., les Égyptiens avaient réalisé des récipients de forme tronconique (clepsydras) pour mesurer le temps et pour lesquels la loi de vidange était *linéaire*. Quelle doit être pour cela la valeur de n ?

Exercice 2.8 : Vase de Tantale

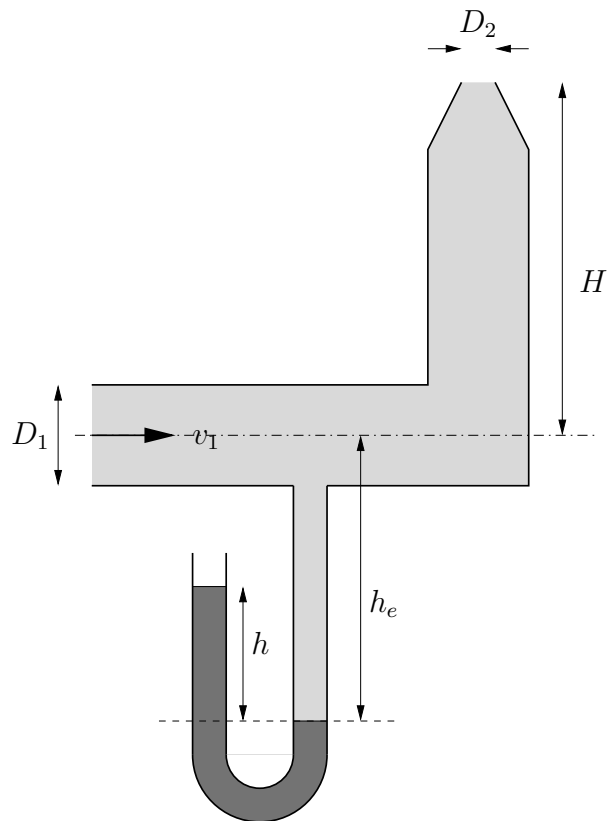
On a le dispositif suivant, représenté sur la figure ci-après. Un robinet fournit un débit d'eau constant Q_e . L'eau s'écoule dans un vase de section S . Un orifice de section s est percé au fond du vase de manière à ce que l'eau puisse vidanger ($S \gg s$).



1. Dans quelles conditions existe-t-il un régime permanent pour le système ? Quel est alors le niveau atteint ?
2. Calculer explicitement la variation de hauteur $h(t)$ en fonction du temps dans le cas général ?

Exercice 2.9 : Manomètre à mercure

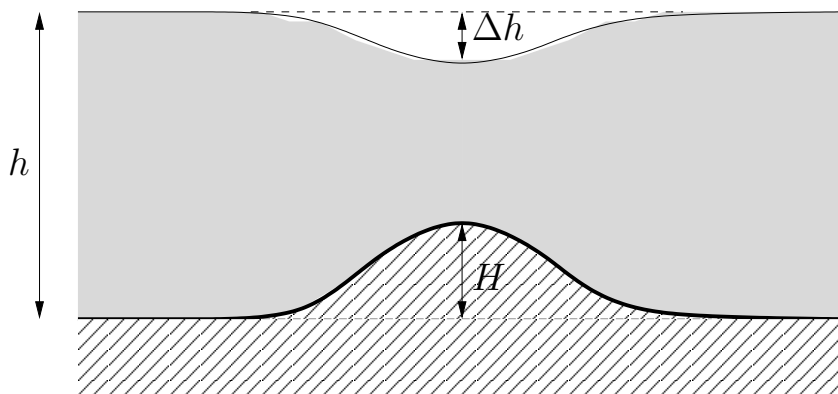
De l'eau circule dans un coude et sort sous forme de jet vers le haut à travers une buse (figure ci-dessous). Un manomètre à mercure est placé en un point S de la tuyauterie horizontale, en amont du coude. On négligera le frottement dans le fluide, et on négligera l'effet de la pesanteur dans l'épaisseur du tube horizontal.



1. Exprimer l'élévation h du mercure en fonction des données du problème.
2. Interpréter les différents termes dans la formule obtenue en pensant à la signification physique de la formule de Bernoulli.
3. Application numérique : $v_1 = 0.5 \text{ m/s}$, $D_1 = 9 \text{ cm}$, $D_2 = 3 \text{ cm}$, $H = 2 \text{ m}$, $h_e = 40 \text{ cm}$, $d_{\text{Hg}} = 13$.
4. Pourquoi utilise-t-on du mercure? Retracer sommairement le schéma si on remplaçait le mercure par un liquide de densité proche de 1.

Exercice 2.10 : Couche liquide au-dessus d'un obstacle

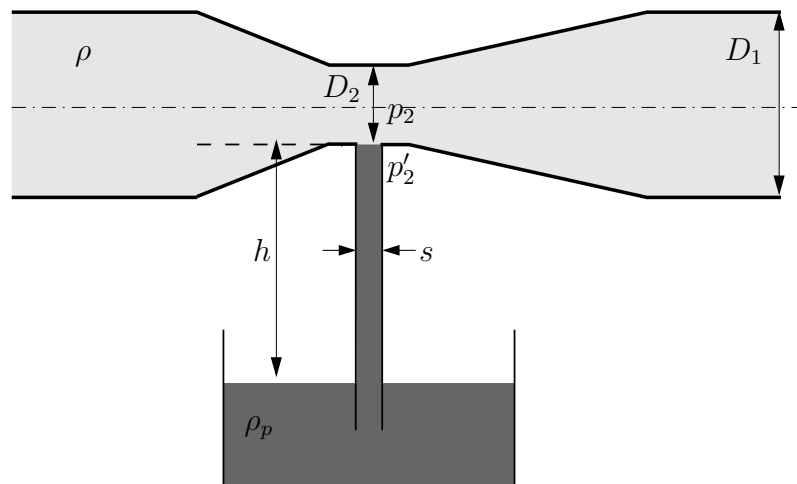
Dans une rivière de vitesse d'écoulement faible, si la hauteur du fond augmente localement, on peut apercevoir une baisse locale du niveau de l'eau (cf. figure)



1. Expliquer le plus simplement possible pourquoi la surface ne peut pas rester plate.
2. On mesure une baisse de niveau Δh . Que vaut le débit de la rivière par unité de largeur ?
3. Application numérique : $h = 2$ m, $\Delta h = 10$ cm, $H = 30$ cm.

Exercice 2.11 : Aspiration par un venturi (DS IFI 2012)

On utilise un venturi comme une pompe, en utilisant la dépression dans l'étranglement, pour aspirer une petite quantité d'un autre fluide de masse volumique ρ_p . Le venturi est traversé par un écoulement principal de fluide de masse volumique ρ avec un débit Q , et débouche à l'atmosphère. On négligera toutes les pertes de charge dans le problème. On note S_1 la grande section du venturi, S_2 la petite, $\alpha = S_1/S_2$, s la section du tube plongeant dans le bac, h la différence de hauteur entre la surface libre dans le bac et le bord du tube. On suppose que le bac a une surface très grande devant s .



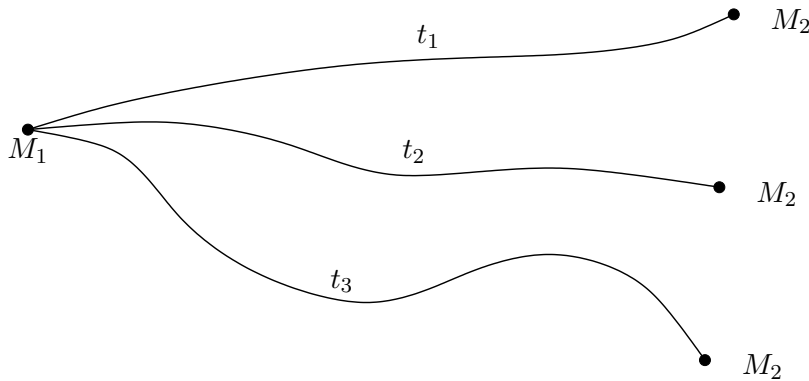
1. Rappeler l'expression de la différence de pression $p_{\text{atm}} - p_2$ en fonction du débit principal Q , de la densité du fluide principal ρ , de la surface S_1 et de α .
2. En régime permanent, exprimer le débit Q_p du fluide pompé en fonction de $p_{\text{atm}} - p'_2$. On justifiera toutes les formules écrites.
3. En déduire Q_p . Si besoin est on pourra supposer que le fluide majoritaire dans le venturi est le fluide circulant horizontalement. On exprimera le résultat en fonction de Q et de préférence en fonction de nombres adimensionnels.

Exercice 2.12 : Exemple d'écoulement instationnaire

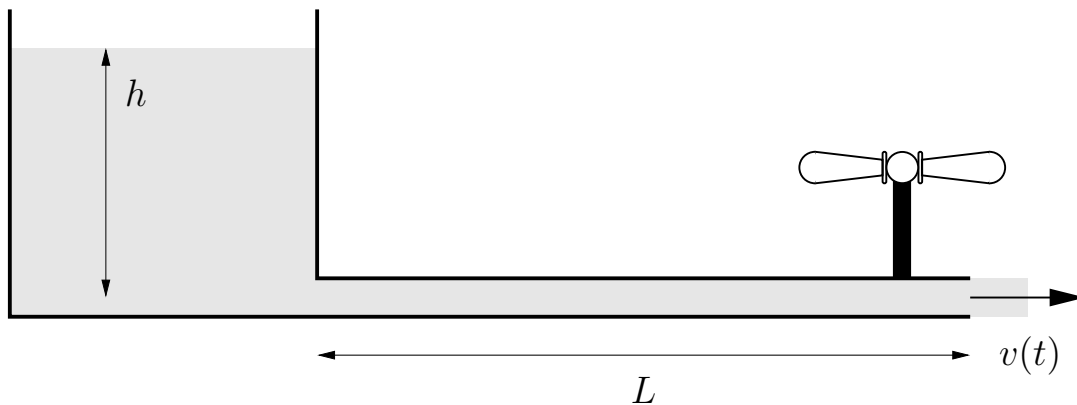
En reprenant la démonstration de la formule de Bernoulli dans le cas instationnaire, on peut montrer facilement qu'elle se généralise en :

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g z_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g z_2 + \rho \int_{M_1}^{M_2} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot d\mathbf{l}$$

où $d\mathbf{l}$ est un élément de la ligne de courant joignant les points M_1 et M_2 . Cette formule est de peu d'utilité en général car les lignes de courant changent au cours du temps, de telle sorte que M_2 est un point mobile dans l'espace (cf. figure ci-dessous).



Il existe malgré tout quelques applications dans le cas où la forme des lignes de courant reste constante, au moins dans une partie de l'écoulement. En voici une : dans un problème de vidange, on cherche à connaître le régime transitoire à partir du moment où l'on ouvre le robinet : initialement le fluide est immobile, et on cherche comment évolue la vitesse de sortie au cours du temps. On supposera que vitesse et accélération sont négligeables dans le réservoir.

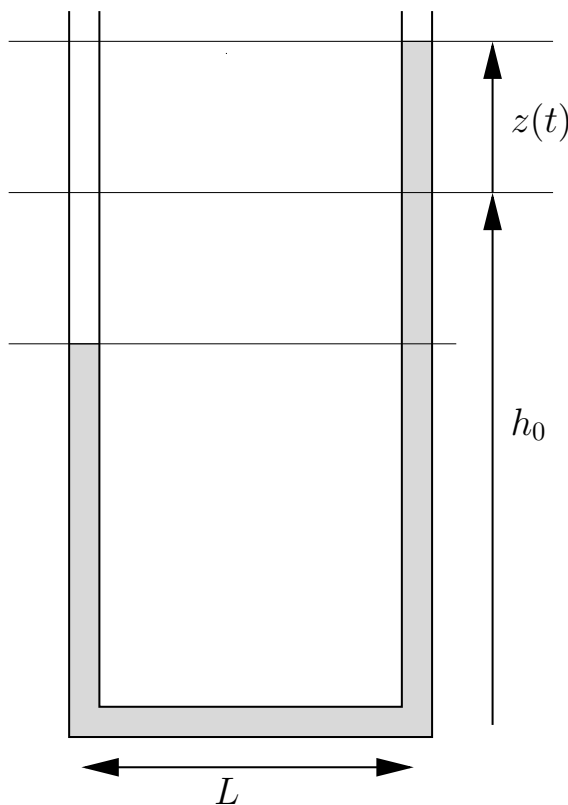


Calculer $v(t)$. On exprimera le résultat par rapport à la vitesse de vidange en régime permanent v_∞ (qui vaut ?).

On rappelle à toutes fins utiles que $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{Argth} \frac{x}{a}$.

Exercice 2.13 : Oscillations dans un tube en U

On considère un tube en U de largeur L initialement rempli d'un fluide de masse volumique ρ jusqu'à une hauteur h_0 . On pousse initialement le fluide vers le bas dans une des branches, et on relâche brusquement cette contrainte : le fluide oscille alors dans le tube en U.

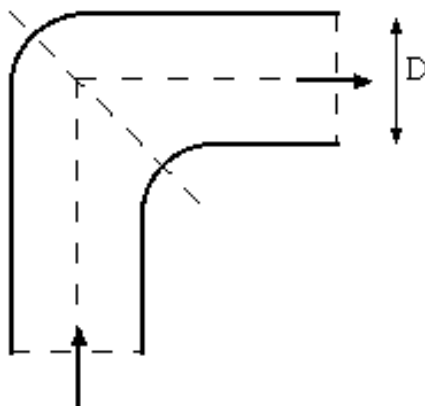


1. En supposant le fluide parfait, et en utilisant la formule de Bernoulli **instationnaire** (on se reportera à l'exercice 2.11) entre les deux surfaces libres, déterminer la période des oscillations.
Indication : on calculera la valeur de $\frac{\partial v}{\partial t} \cdot d\mathbf{l}$ en tout point du tube en fonction de \ddot{z} dérivée seconde de la position de la surface du liquide dans la branche de droite, et on cherchera à obtenir une équation différentielle du type $\ddot{z} + \omega_0^2 z = 0$.
2. Comment peut-on généraliser ce résultat pour un tube de forme quelconque (par exemple en forme de W) mais de longueur totale connue ?
3. La résolution de l'équation donnerait des oscillations durant indéfiniment. Il n'en est bien sûr pas ainsi dans la réalité. Quel phénomène physique avons-nous négligé ? Quelle propriété physique du fluide faut-il considérer ? Quelle est l'unité S.I. de cette propriété ?
4. A.N. : on donne $h_0 = 20$ cm, $L = 10$ cm. Donner la période T en secondes.

3 Forces exercées par un fluide sur un corps solide.

Exercice 3.1 : Effort sur un coude (DS IFI 2003)

Soit un tube de section circulaire de diamètre d'entrée et de sortie $D = 0.2$ m, coudé à angle droit et posé sur un plan horizontal. Il contient de l'eau à la pression moyenne $p = 6$ bars. Le débit d'eau est $Q = 0.160$ m³/s.

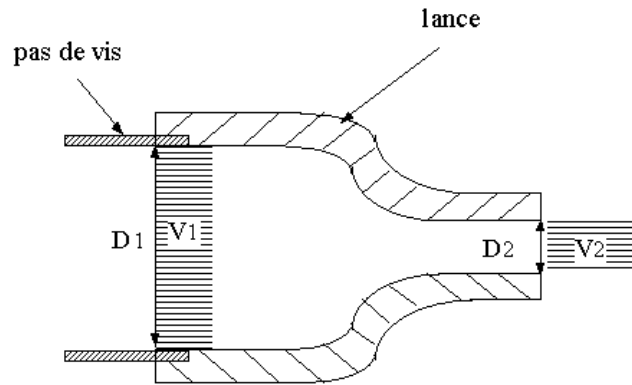


Calculer la résultante \mathbf{R} des forces que l'eau + l'atmosphère exercent sur le coude. On supposera le fluide parfait et on négligera le poids de l'eau. On prendra $\rho = 1000$ kg/m³.

Exercice 3.2 : Effort sur une lance d'incendie.

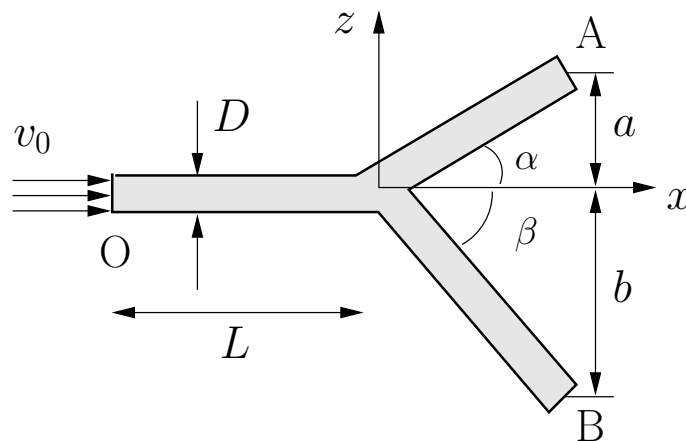
L'embout d'une lance d'incendie a un diamètre intérieur $D_2 = 10$ cm. Il est vissé à un tube cylindrique de diamètre intérieur $D_1 = 20$ cm. Quand l'embout est ouvert à l'air libre, la lance d'incendie débite $Q = 40$ litres d'eau par seconde.

Calculer la force F à laquelle doit résister le pas de vis quand l'embout est ouvert. On négligera la pesanteur.



Exercice 3.3 : Effort sur une tuyauterie (rattrapage 2001).

On considère le système de tuyauterie OAB ci-dessous. Tous les tubes ont la même section. Le fluide entre en O avec une vitesse v_0 à la pression p_0 , et débouche en A et B à la pression atmosphérique p_a .

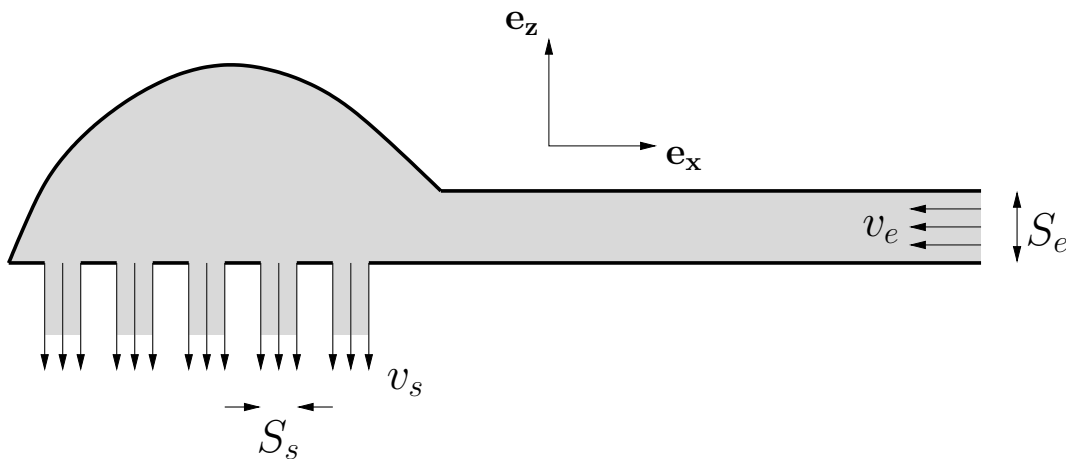


1. En utilisant la conservation du débit, exprimer une relation entre les vitesses de sortie v_A et v_B , et la vitesse d'entrée v_0 .
2. En utilisant la relation de Bernoulli deux fois, relier les conditions entre O et A, et O et B. **Attention** : a et b sont suffisamment grands pour que la pesanteur ne puisse pas être négligée.
3. Dédire des trois relations obtenues les vitesses de sortie v_A et v_B .
4. En déduire la pression d'entrée p_O . On ne développera pas les expressions de v_A et v_B obtenues à la question précédente.
5. En utilisant le principe de conservation de la quantité de mouvement, calculer la force exercée par le fluide + l'air extérieur sur la tuyauterie.
6. Application numérique : Calculer v_A , v_B , p_0 et les composantes de F pour les valeurs suivantes : $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, $v_0 = 10 \text{ m/s}$, $a = 1 \text{ m}$, $b = 2 \text{ m}$, $D = 4 \text{ cm}$, $L = 1 \text{ m}$, $\alpha = \pi/6$, $\beta = \pi/3$.

Exercice 3.4 : Pommeau de douche (DS IFI 2006)

Un embout de douche est constitué d'un tuyau d'entrée de section S_e et de N trous de sortie ayant chacun une section S_s (cf. figure). Le fluide entre à la vitesse v_e et sort à l'atmosphère à la vitesse v_s , supposée identique dans chaque trou. On note Q le débit volumique, et p_{atm} la pression atmosphérique.

On supposera le fluide parfait incompressible.



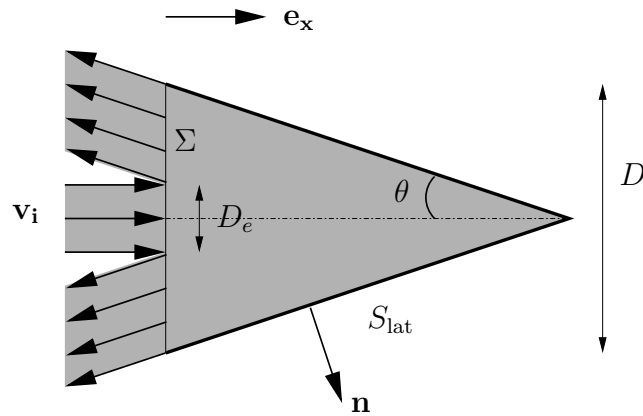
1. Exprimer la vitesse de sortie v_s en fonction de la vitesse d'entrée v_e .
2. Exprimer la pression p_e à l'entrée en fonction de p_{atm} et v_e .
3. Calculer la force totale exercée par le fluide + l'air sur le pommeau. On exprimera le résultat en fonction des vecteurs unitaires \mathbf{e}_x et \mathbf{e}_z indiqués sur la figure. Le poids ne sera PAS négligé, et l'on notera V le volume interne du pommeau. A l'aide des questions précédentes on exprimera le résultat en fonction de Q seulement (formule indépendante de p_e , v_e , p_s et v_s)
4. On note M_p la masse du pommeau. A partir de quel débit Q_c le pommeau de douche décolle-t-il ?

Exercice 3.5 : Force sur un cône

On considère un jet de diamètre D_e de fluide de masse volumique ρ incident avec une vitesse v_e uniforme dans l'axe d'un cône de longueur L et d'ouverture θ . On suppose que le fluide ressort avec une vitesse uniforme dans toute la surface complémentaire de la section d'entrée, parallèlement aux parois du cône.

On supposera le fluide parfait et incompressible. Le fluide rentre et sort à la pression atmosphérique p_{atm} . On notera Σ la base du cône et S_{lat} ses parois latérales.

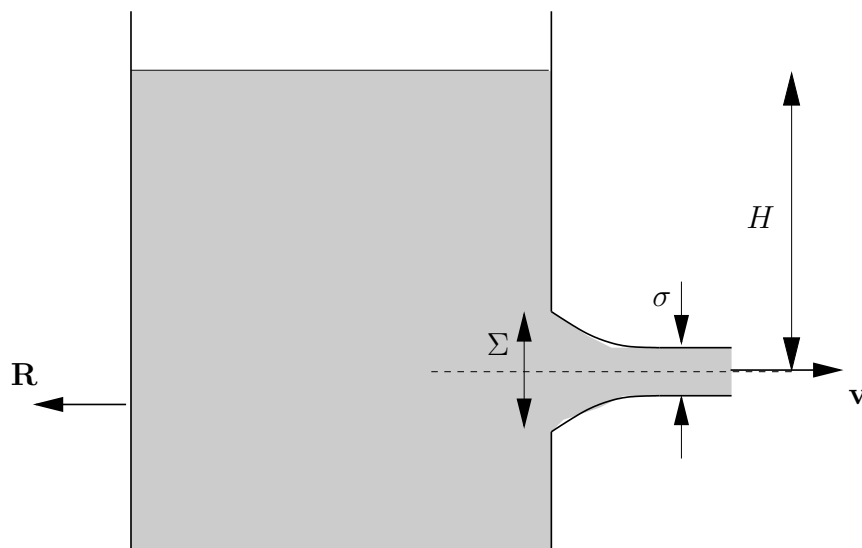
On cherche la force exercée par le fluide + l'air ambiant sur le cône.



1. Ecrire la conservation du débit et en déduire la vitesse de sortie v_s en fonction de v_e , D et D_e .
2. Rappelez l'expression intégrale de la force de pression exercée par le fluide + l'air extérieur sur les parois latérales du cône (on supposera que l'on est en régime permanent). On rappellera simplement la formule sans la redémontrer.
3. Calculez les intégrales intervenant dans la formule précédente et en déduire l'expression de la force en fonction de ρ , v_e , D_e , D et θ .
4. A.N. : fluide = eau, on donne $D_e = 10 \text{ cm}$, $D = 20 \text{ cm}$, $\theta = 30^\circ$ et $v_e = 1 \text{ m s}^{-1}$. Calculer l'amplitude de la force.

Exercice 3.6 : Réaction d'un jet d'eau

De l'eau s'échappe, par un orifice percé sur la surface latérale d'un réservoir, à une vitesse V . On note Σ la section de l'ouverture. on constate expérimentalement que le jet se contracte jusqu'à une section σ appelée section contractée. On note H la distance entre l'orifice et la surface libre.



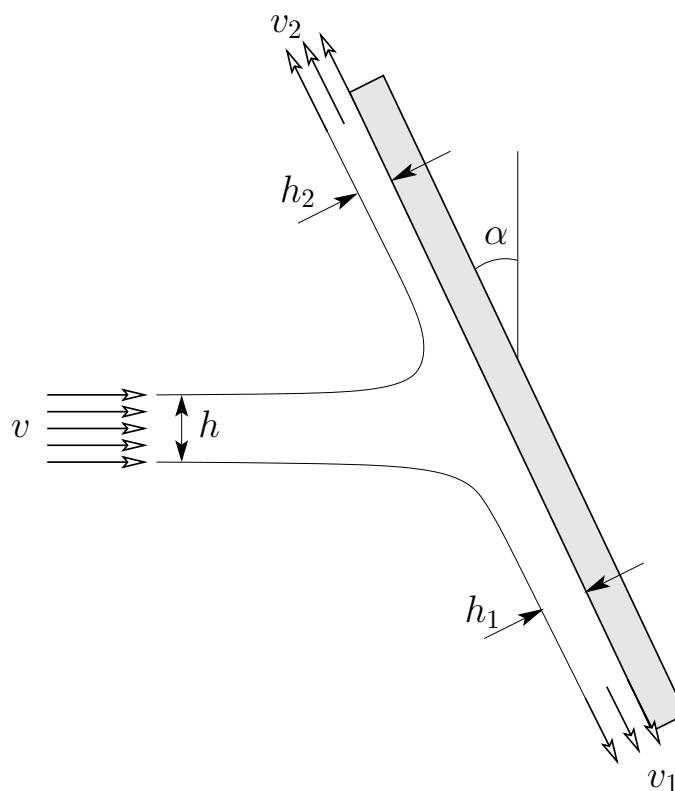
1. En utilisant la conservation de la quantité de mouvement sur un volume adéquat, calculer la composante horizontale de la réaction R qui s'exerce sur le réservoir, en fonction de Σ et σ .
2. En écrivant une approximation judicieuse de la pression sur les parois du récipient, trouver une relation entre les sections Σ et σ .

Application numérique :

- Liquide = eau
- Distance surface libre - orifice de sortie $H = 2$ m
- Section de sortie $\Sigma = 1$ dm²

Exercice 3.7 : Jet incident sur un plan incliné

Considérons un jet de liquide 2D sur une plaque plane en forme de lame d'épaisseur h et de largeur l dans la direction Oz perpendiculaire au plan de la figure.



On fait les hypothèses suivantes :

- on néglige les forces de frottement visqueux
- régime permanent

— on néglige les effets de la pesanteur

1. Quelles sont les pressions en sortie et en entrée ?
2. En déduire les vitesses en sortie, ainsi qu'une relation entre les épaisseurs de la lame en entrée et en sortie.
3. Calculer la force exercée par l'atmosphère plus l'écoulement sur la plaque.
4. Projeter cette force sur la normale et la tangente à la plaque, et en utilisant l'hypothèse fluide parfait, en déduire les épaisseurs h_1 et h_2 .

Exercice 3.8 : Tondeuse à gazon sur coussin d'air (DS IFI 2009)

Avertissement : les questions 8 et suivantes ne peuvent être traitées qu'à l'issue du cours sur les pertes et gains de charge.

Une tondeuse à gazon sur coussin d'air est représentée en coupe sur la figure 2 : de l'air rentre verticalement à la pression p_e et à une vitesse V_e dirigée vers le bas, par un tube de section S_e , dans une cavité à symétrie de révolution limitée par une surface solide S_{lat} , et sort radialement à la pression atmosphérique et à la vitesse V_s , entre le sol et la tondeuse. Le rayon de la cavité au niveau du sol est noté R , et le rayon du tube d'entrée R_e .

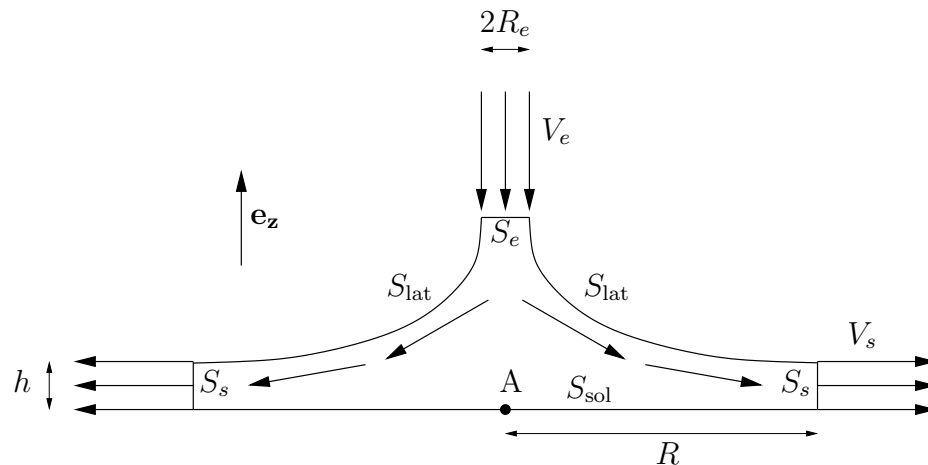


FIGURE 2 – Écoulement dans une tondeuse à coussin d'air

On cherche la force exercée par l'écoulement + l'air extérieur sur la tondeuse. L'expression générale de cette force est (rappel)

$$\mathbf{F} = \iint_{S_{\text{lat}}} (p - p_{\text{atm}}) \mathbf{n} \, dS,$$

en notant \mathbf{n} le vecteur normal sortant au fluide, p la pression dans le fluide.

Dans toutes les questions on négligera le poids de l'air.

1. On rappelle l'expression intégrale de la conservation de la quantité de mouvement :

$$\iint_S (\rho \mathbf{v}) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_S -(p - p_{\text{atm}}) \mathbf{n} \, dS + \iiint_V \rho \mathbf{g} \, dV.$$

Montrer que la force \mathbf{F} peut s'écrire :

$$\mathbf{F} = - \iint_{S_e} \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \, dS - \iint_{S_s} \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \, dS + \iint_{S_{\text{sol}}} -(p - p_{\text{atm}}) \mathbf{n} \, dS + \iint_{S_e} -(p - p_{\text{atm}}) \mathbf{n} \, dS \quad (1)$$

On notera \mathbf{e}_z le vecteur unitaire orienté vers le haut.

2. Calculer la première intégrale dans l'expression (1).
3. Montrer que dans l'expression (1), la seconde intégrale est nulle.
4. Calculer la 4ème intégrale dans l'expression (1), en supposant la pression p_e uniforme sur S_e .
5. Le point A est un point d'arrêt de l'écoulement. Calculer la pression p_A en fonction des conditions sur S_e .
6. Montrer que la troisième intégrale dans (1) peut s'écrire :

$$\iint_{S_{\text{sol}}} -(p - p_{\text{atm}}) \mathbf{n} \, dS = \alpha \pi R^2 (p_A - p_{\text{atm}}) \mathbf{e}_z,$$

où α est un coefficient compris entre 0 et 1.

7. En déduire l'expression de \mathbf{F} en fonction de p_e , V_e , S_e et R . Simplifier l'expression obtenue pour $R_e \ll R$.

Avertissement : les questions suivantes relèvent du chapitre "Pertes et gains de charge".

Les conditions à l'entrée S_e sont obtenues en pompant l'air ambiant avec un compresseur de puissance \mathcal{P} .

8. En négligeant la perte de charge entre l'atmosphère et la section d'entrée de la tondeuse, en déduire l'expression de la force \mathbf{F} en fonction de la puissance \mathcal{P} , du débit volumique Q et de paramètres géométriques.
9. On note e_v le coefficient de perte de charge singulière au niveau de l'interstice de sortie de l'air (de hauteur h). A l'aide de Bernoulli généralisé, exprimez \mathcal{P}/Q , puis la force F de sustentation en fonction de la vitesse de sortie de l'air V_s par l'interstice.
10. En déduire l'expression de la vitesse de sortie, puis de la puissance nécessaire pour sustenter à une hauteur h une tondeuse de masse M et de rayon R .
11. A.N. : $R = 25$ cm, $\alpha = 0.8$, $M = 7.5$ kg, $h = 1$ cm. On donne $e_v \simeq 3$ pour un interstice entre deux espaces infinis.
Calculer \mathcal{P} et Q .

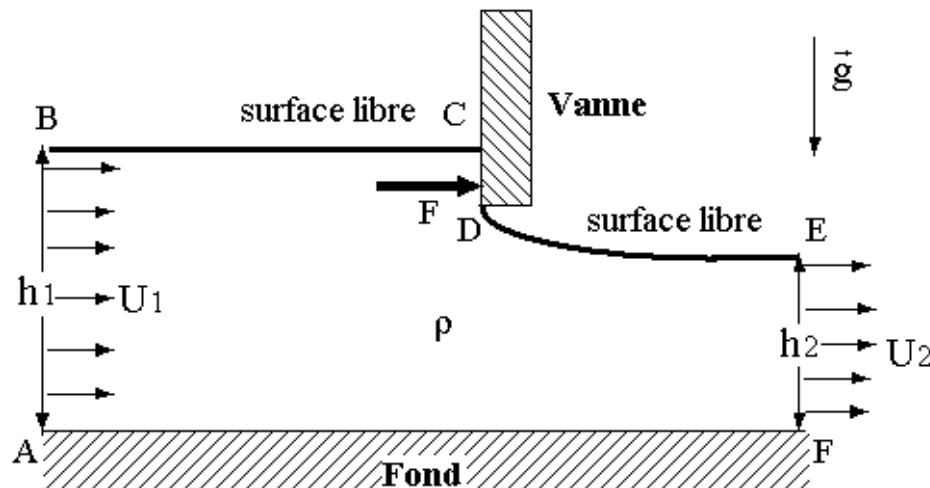
Exercice 3.9 : Vanne de décharge

On considère la vanne de décharge schématisée sur la figure ci-dessous. On note l sa largeur (dans la direction perpendiculaire au dessin). On suppose l'écoulement stationnaire, le fluide parfait incompressible, et on supposera que la vitesse est uniforme sur les sections d'entrée et de sortie.

1. Rappeler l'équation de conservation de la quantité de mouvement d'un volume V de fluide en régime permanent sous forme intégrale, faisant intervenir la pression atmosphérique p_{atm} .
2. En utilisant cette équation, calculer la composante horizontale de la force \mathbf{F} exercée par le fluide + l'atmosphère sur la vanne, en fonction de h_1 , h_2 , v_1 , v_2 .
3. On pose $\alpha = h_2/h_1$. Calculer v_1 en fonction de α et h_1 , en utilisant la formule de Bernoulli et la conservation du débit.
4. En déduire que la composante horizontale de la force sur la vanne s'écrit :

$$F = \frac{1}{2} \rho g l h_1^2 f(\alpha)$$

où $f(\alpha)$ est une fonction que l'on précisera.

**Exercice 3.10 : Force sur un obstacle dans une rivière (DS IFI 2010).**

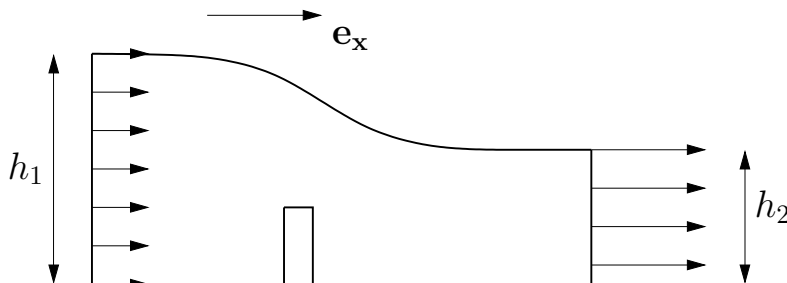
Une rivière de largeur l et de hauteur h_1 , à la vitesse v_1 uniforme coule au-dessus d'un obstacle immergé occupant toute la largeur de la rivière. En aval de l'obstacle, la hauteur de l'eau est h_2 et coule à une vitesse v_2 supposée uniforme dans la hauteur.

On rappelle que la pression varie de façon hydrostatique perpendiculairement à un écoulement parallèle.

1. Montrer que la composante horizontale de la force exercée sur l'obstacle s'écrit :

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_x = \left[- \iint_{S_1+S_2} \rho \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS \right] \cdot \mathbf{e}_x + \left[\iint_{S_1+S_2} -(p - p_{\text{atm}}) \mathbf{n} dS \right] \cdot \mathbf{e}_x$$

2. Calculer le premier terme
3. Calculer le second terme
4. En déduire l'expression de la force en fonction de la hauteur h_1 , de la largeur l , de $\alpha = h_2/h_1$, et du nombre de Froude $v_1^2/(gh_1)$.
5. A. N. : $h_1 = 2$ m, $h_2 = 1.5$ m, $v_1 = 0.5$ m/s, $l = 3$ m.

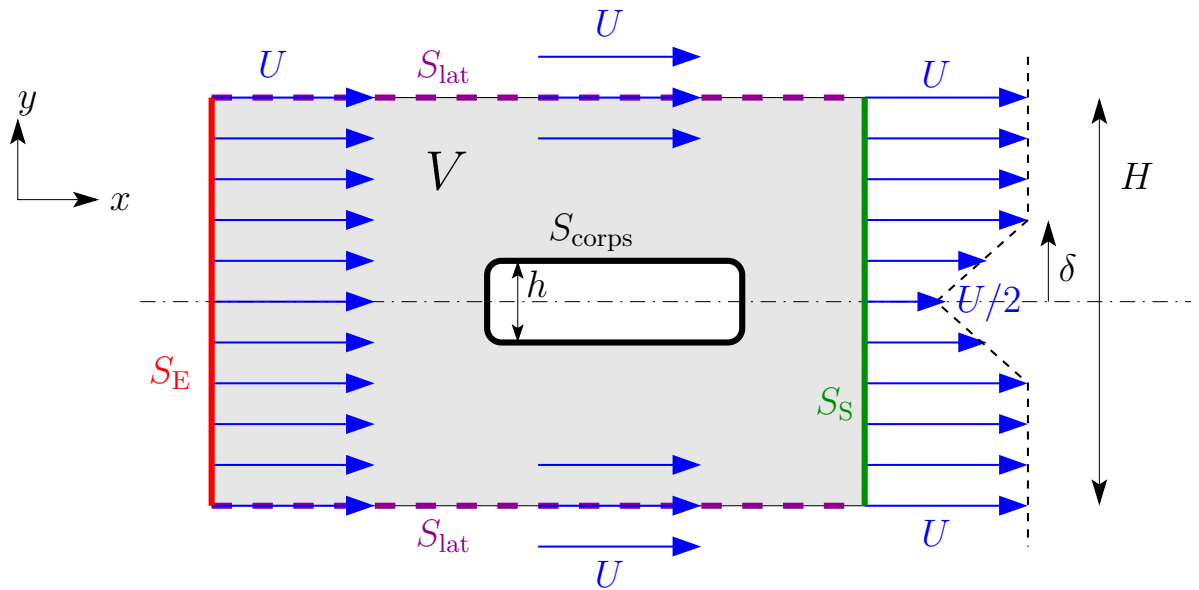


Exercice 3.11 : Approximation de la traînée sur un corps

Par certains aspects, on pourra éventuellement s'inspirer des exercices tondeuse à coussin d'air et vanne de décharge.

Les questions sont volontairement détaillées et admettent souvent des réponses courtes.

Des mesures de vitesses dans l'écoulement autour d'un corps d'épaisseur h et de largeur b très grande perpendiculairement à la figure, montrent que loin du corps, le profil est presque uniforme dans l'espace, sauf en aval, où l'on enregistre un déficit de vitesse (cf. figure ci-dessous). La vitesse dans le plan de symétrie $y = 0$ vaut $U/2$, et se raccorde linéairement à un profil uniforme sur une épaisseur δ .



Le but de cet exercice est d'estimer le coefficient de trainée sur le corps, en utilisant l'équation de conservation de la quantité de mouvement sur le volume V en régime permanent (indiqué en gris sur la figure, limité par la surface $S = S_E + S_S + S_{\text{lat}} + S_{\text{corps}}$) :

$$\iint_S (\rho \mathbf{v}) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_S -(p - p_0) \mathbf{n} \, dS + \iint_S \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}_v}} \cdot \mathbf{n} \, dS + \iiint_V \rho \mathbf{g} \, dV. \quad (2)$$

où p_0 est une constante arbitraire, et \mathbf{n} la normale sortante au fluide.

La surface S_{lat} est une surface fictive appuyée sur des lignes de courant. Elle n'a aucune existence matérielle (similairement au problème de l'éolienne).

1. Rappelez brièvement pourquoi on peut soustraire une constante arbitraire p_0 à la pression p dans la seconde intégrale.
2. Expliquez brièvement pourquoi, dans le cas présent, l'intégrale de contrainte visqueuse est nulle sur S_E et sur S_{lat} .
Expliquez, éventuellement sans calculs, pourquoi elle est également nulle sur S_S . (des arguments simples suffiront dans les deux cas, mais on peut écrire le tenseur des contraintes si besoin est).
3. Rappelez l'expression de la force \mathbf{F} exercée par le fluide sur le corps sous la forme d'intégrales sur S_{corps} faisant intervenir la normale sortante au fluide.
4. On supposera le mouvement horizontal et que la pression est environ égale à p_0 sur les frontières $S_E + S_S + S_{\text{lat}}$.

En projetant sur x l'équation (2) appliquée au volume limité par $S_E + S_S + S_{\text{lat}} + S_{\text{corps}}$, et à l'aide des questions précédentes, montrez que la force horizontale exercée par le fluide sur le corps peut s'écrire :

$$F_D = \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_x = -\mathbf{e}_x \cdot \iint_{S_E + S_S} (\rho \mathbf{v}) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

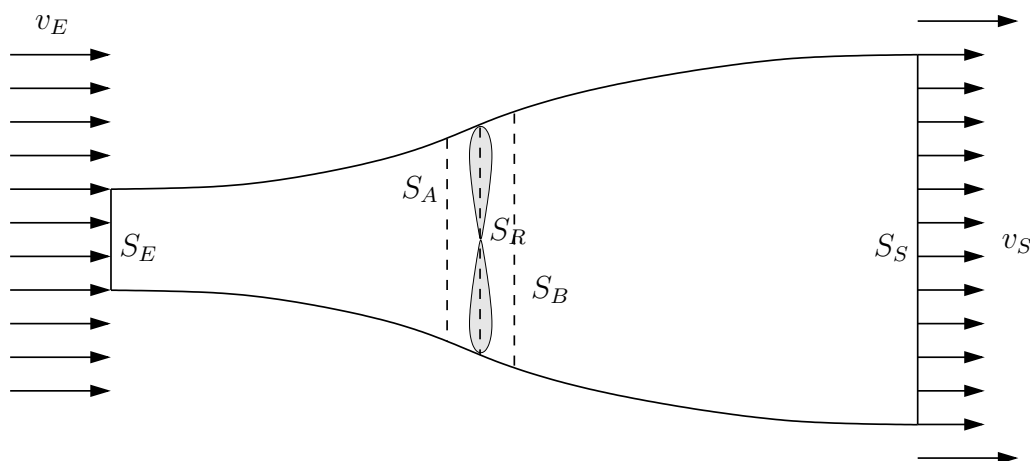
où \mathbf{e}_x est un vecteur orienté dans le sens de l'écoulement.

On pourra remarquer que la surface du corps est fermée.

5. Donnez l'expression analytique du profil de vitesse $u(y)$ sur la section aval.
6. En déduire la force F_D de la question 4.
7. Calculez le coefficient de traînée C_D (basé sur la surface frontale)
8. Le profil de vitesses modélisé en aval vous paraît-il satisfaire toutes les lois de la mécanique des fluides ? Que proposeriez-vous comme modification sur la figure ?

Exercice 3.12 : Eolienne

L'écoulement autour d'une éolienne est approximativement contenu dans un tube de courant s'appuyant sur le bord des pales (Fig. 3.12), dont on note la section S_R . La vitesse sur la section d'entrée S_E est uniforme et égale à la vitesse du vent. La pression sur les sections d'entrée S_E , de sortie S_S et sur les parois latérales du tube de courant est environ la pression atmosphérique.



Il doit être bien clair dans ce problème, les seules données connues sont v_E vitesse du vent et D_R diamètre des pales. Les autres données doivent être déduites, notamment les sections S_E et S_S . Ce problème vise à obtenir quelques résultats généraux, indépendants de la forme des pales.

1. Quel est l'évolution de la vitesse dans le tube de courant ? Quel est l'effet provoqué par l'éolienne ?
2. Pourquoi l'énoncé est-il incompatible avec la formule de Bernoulli classique ? Où est le problème ?
3. Calculez la force exercée par le vent sur la pale par un bilan de QDM sur le tube de courant. On notera Q le débit dans le tube.
4. On note A et B deux points respectivement juste en amont et juste en aval de l'hélice, suffisamment proches pour que $S_A \simeq S_B = S_R$. Calculez les vitesses et les pressions en A et B en fonction de Q , ainsi que la différence de pression

$p_A - p_B$. Quel est son signe ? Qu'est-ce que cela signifie en terme de conservation de l'énergie mécanique ?

5. Recalculez la force en faisant maintenant un bilan de QDM sur le tube contenu entre S_A et S_B .
6. En égalant les deux expressions obtenues pour la force, déduisez-en une relation entre S_R , S_E et S_S , puis entre v_R , v_E et v_S .

*Avertissement : les questions suivantes relèvent du chapitre
"Perturbations et gains de charge".*

7. Calculez la puissance P fournie à l'éolienne par l'écoulement.
8. On cherche à calculer le maximum possible de cette puissance. Pour cela exprimer P en fonction des données connues S_R , v_E et de $\alpha = S_E/S_S$. Exprimer également les rapport S_E/S_R et S_S/S_R en fonction de α .
9. Déterminez la valeur de α donnant la plus grande valeur pour P ainsi que la puissance maximale extractible. C'est la formule de Betz. Expliquez (en langage courant) pourquoi, à votre avis, il y a un maximum.
10. On définit le coefficient de puissance :

$$C_P = \frac{P}{\frac{1}{2}\rho v_E^3 S_R}$$

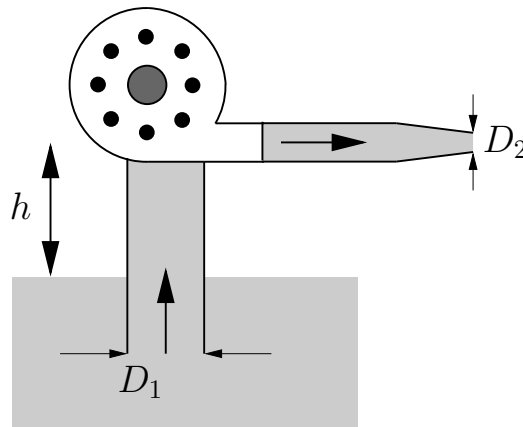
Donnez une interprétation physique du dénominateur. Donnez la valeur maximale de C_P .

11. Application numérique (Enercon E70/2300) : $v_E = 15 \text{ m s}^{-1}$, $D_R = 71 \text{ m}$. Calculez la puissance maximale extractible en MW, pour de l'air à 15°C .
12. Quels autres problèmes de mécanique des fluides pourraient être traités de façon similaire ?

4 Pertes et gains de charge.

Exercice 4.1 : Pompe

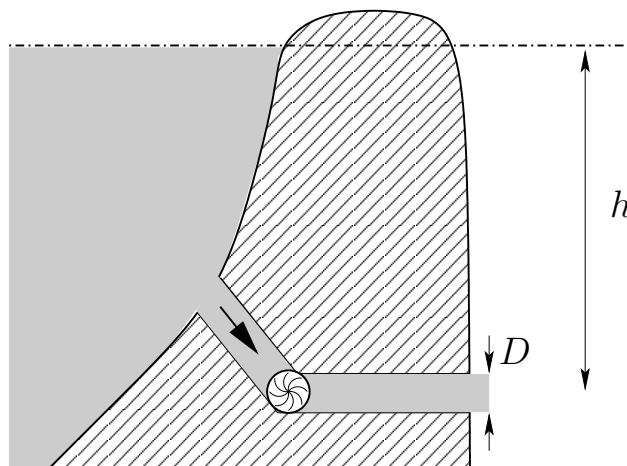
On pompe de l'eau dans la mer par un tuyau de 15 cm de diamètre et la décharge à une altitude $h = 3$ m à travers un convergent de diamètre de sortie 3 cm, avec un débit $Q = 27$ l/s. On estime la perte de charge totale $h_v = 50$ cm.



Sachant que la pompe a un rendement de 75 %, quelle puissance \dot{W}_m doit avoir le moteur de la pompe ?

Exercice 4.2 : Turbine de barrage

Un barrage hydroélectrique prend $Q = 39.5$ m³/s d'eau à travers sa turbine et la décharge à l'atmosphère dans une conduite de diamètre $D = 2$ m. La perte de charge totale dans le système est estimée à $h_v = 20$ m et la différence d'altitude entre la surface du lac de retenue et la décharge est $h = 290$ m.



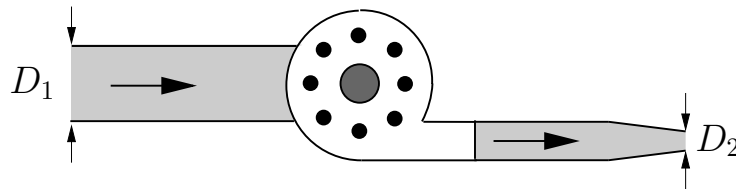
1. Quelle est la puissance fournie par le fluide à la turbine (formule littérale) ?

- Application numérique. Comparer les ordres de grandeur des différents termes dans la formule obtenue. Quelles conclusions peut-on en tirer sur la conversion d'énergie dans le système ?

Exercice 4.3 : Propulsion par jet

Pour propulser un bateau, un moteur aspire de l'eau à la pression atmosphérique dans son tuyau d'entrée de diamètre $D_1 = 20$ cm, et la rejette à la pression atmosphérique à une vitesse 5 fois plus élevée dans son tuyau de sortie de diamètre D_2 . Le débit volumique à travers le moteur est $Q = 150$ l/s. Les pertes de charge seront négligées.

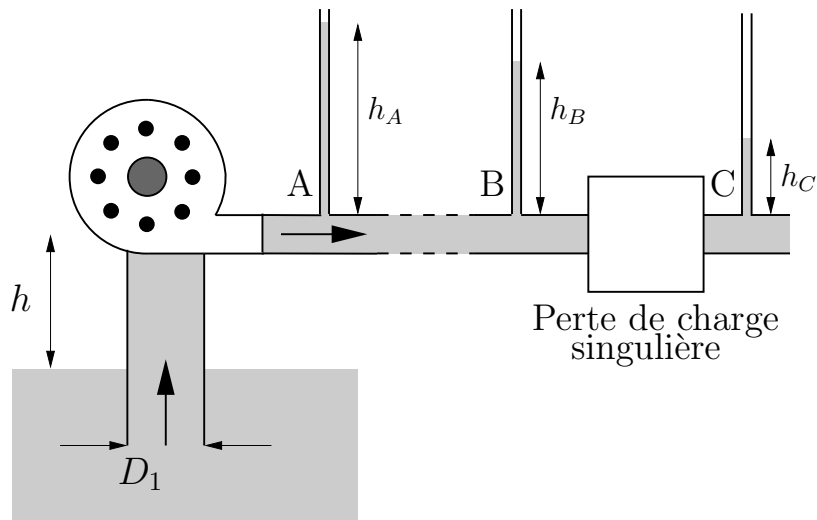
On fournira les résultats d'abord sous forme littérale, puis sous forme numérique.



- Quelle doit être la valeur de D_2 ?
- Quelle est la puissance de ce moteur en chevaux (1 cheval = 746 W)

Exercice 4.4 : Mesure de perte de charge

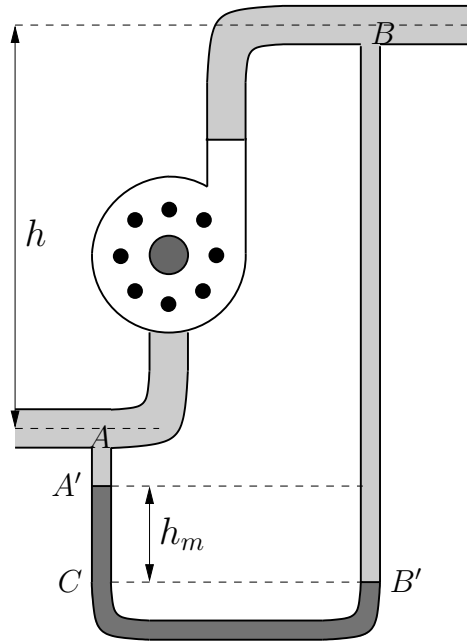
Pour mesurer la perte de charge singulière dans une anomalie de tuyauterie (robinet, vanne, coude, U, élargissement ou rétrécissement brusque), on monte un banc de mesure constitué d'un réservoir dans lequel on pompe du fluide alimentant le circuit placé à une hauteur h au-dessus de la surface libre du réservoir. On place deux tubes piezométriques B et C aux bornes de l'anomalie, et un en sortie de la pompe A. On note h_v la perte de charge cherchée entre B et C.



1. Exprimer la hauteur indiquée par le tube A en fonction de la puissance de la pompe, du débit volumique et de la section du tube. On négligera toutes les pertes de charge en amont de la pompe.
2. Exprimer la différence des hauteurs h_B et h_C .
3. Le dimensionnement du problème fait que les tubes placés en B et C devraient être plus grand que la hauteur de la pièce. Quelle solution suggérez-vous pour limiter h_B et h_C ?

Exercice 4.5 : Différence de charge aux bornes d'une pompe (DS IFI 2005)

Un tube en U contenant du mercure est connecté sur les conduites d'entrée et de sortie d'une pompe, supposées de même diamètre, comme indiqué sur la figure. On mesure une différence de hauteur h_m entre les niveaux de mercure dans les deux branches du tube en U.



On notera :

- P la puissance de la pompe
- h_v la perte de charge totale entre l'entrée et la sortie
- Q le débit volumique
- d la densité du mercure

On suppose le fluide incompressible. On rappelle que la pression peut être considérée identique en tout point d'une même section du tuyau, et que les fluides dans le tube en U sont immobiles.

1. En considérant l'équilibre du mercure dans le tube en U, exprimer la différence de pression $p_B - p_A$ en fonction de h , h_m et d densité du mercure. On pourra s'aider des points dessinés sur la figure.
2. En déduire h_m en fonction de h_v et P .
3. Le résultat dépend-il de h ? Quelle grandeur mesure en fait le tube en U?

Exercice 4.6 : Pompe sur une tuyauterie avec pertes de charge (oral rat-trapage IFI 2016)

On pompe de l'eau à 20°C dans un bac très large, à travers N coudes et une tuyauterie de longueur totale L , de diamètre D , et de rugosité ϵ , pour la faire monter d'une hauteur h , avec un débit volumique Q .

1. On suppose l'écoulement turbulent. Quel est le critère pour cela?

2. Rappelez l'expression explicite la plus précise que vous connaissez pour le coefficient de perte de charge régulière.
3. Calculez la puissance de la pompe nécessaire.
4. On dispose maintenant d'une pompe de puissance connue. Pourquoi ne peut-on pas calculer analytiquement le débit obtenu ?
5. On suppose le coefficient de perte de charge régulière f indépendant du Reynolds et vaut f_0 . Sous quelle condition peut-on faire cette hypothèse ? Simplifier l'équation du problème. Est-elle vraiment plus simple si la puissance de la pompe est donnée ?
6. On suppose que la hauteur de charge apportée par la pompe est de la forme :

$$h_u = h_{u0} \left[1 - \left(\frac{Q}{Q_m} \right)^2 \right]$$

Trouvez le débit graphiquement, puis analytiquement.

7. Quelle vérification doit-on faire pour assurer un fonctionnement correct de la pompe ?

Exercice 4.7 : Dimensionnement d'une pompe d'arrosage

On veut installer une pompe d'arrosage sur un terrain de pente α par rapport à l'horizontale. On souhaite arroser le terrain à une altitude h au-dessus du bac de pompage avec un débit minimal Q à travers des tuyaux de diamètre D . On prendra en compte les pertes de charge en ligne en prenant pour coefficient de frottement :

$$f = \frac{0.3164}{\text{Re}^{1/4}},$$

où $\text{Re} = \rho v D / \eta$ est le nombre de Reynolds. La longueur L du tuyau sera prise égale à $h / \sin \alpha$. Rappeler l'expression de la perte de charge en ligne h_v , exprimée en hauteur équivalente. Exprimer la puissance minimale de la pompe en fonction de h et Q .

A.N. : $Q = 5 \text{ m}^3/\text{h}$, $D = 4.5 \text{ cm}$, $h = 60 \text{ m}$, $\alpha = 20^\circ$. Calculer numériquement la vitesse du fluide, le nombre de Reynolds, la perte de charge en ligne et la puissance de la pompe.

Exercice 4.8 : Ressaut hydraulique (DS IFI 2008)

On peut facilement observer dans un canal, une rivière, ou bien au fond d'un évier à quelques centimètres autour du jet du robinet, la transition brutale d'un écoulement de faible épaisseur h_1 et de forte vitesse v_1 , vers un écoulement d'épaisseur plus élevée h_2 et de vitesse plus faible v_2 . Dans la zone de transition, l'écoulement est très désordonné.

On se propose de calculer h_2 et v_2 en fonction de h_1 et v_1 dans le cas d'un canal de largeur l dans le sens perpendiculaire à la feuille sur la figure. On supposera le fluide incompressible, et que l'écoulement est parallèle sur les sections S_1 et S_2 .

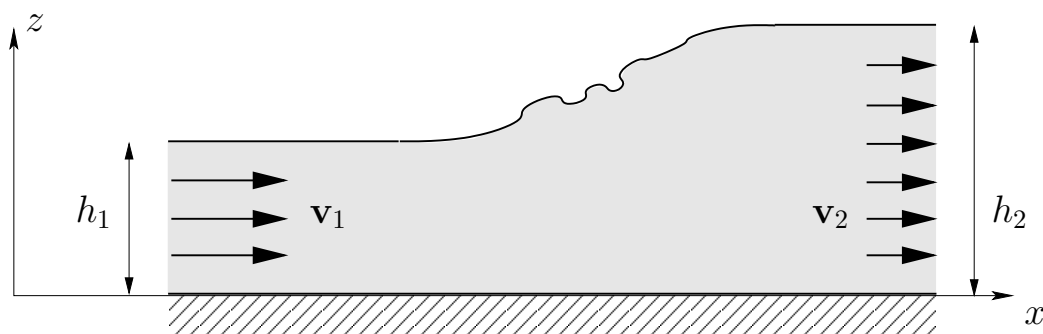
1. Quelle relation fournit la conservation de la masse ? On posera $\alpha = h_1/h_2$.

La formule de Bernoulli n'est plus valable dans ce cas, et l'on se propose d'appliquer, sur le volume indiqué sur la figure, l'équation de conservation de la quantité de mouvement sous forme globale

$$\iint_S (\rho \mathbf{v}) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_S -(p - p_{\text{atm}}) \mathbf{n} \, dS + \iiint_V \rho \mathbf{g} \, dV, \quad (3)$$

où l'on a négligé les forces de frottement visqueux sur le fond du canal.

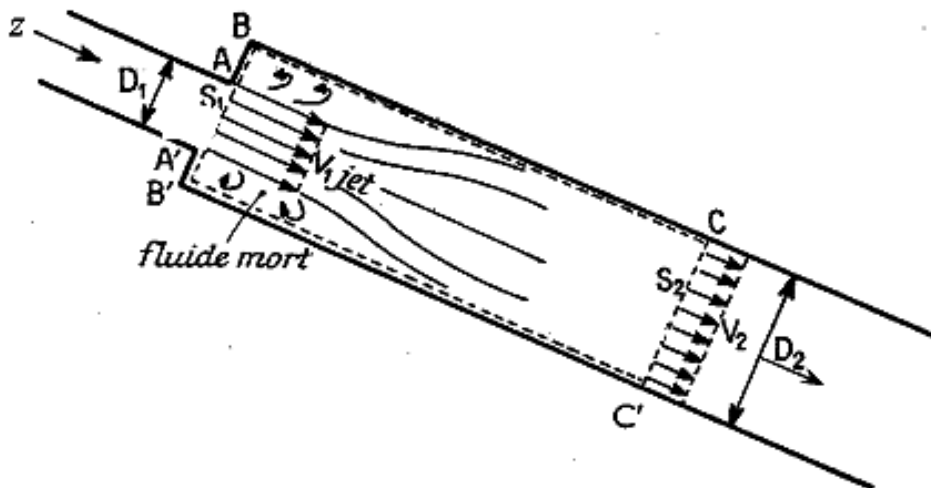
2. Rappeler pourquoi l'on peut ajouter le terme en p_{atm} dans cette équation.
3. On prend l'origine des altitudes au fond du canal. On supposera que sur S_1 et S_2 , la pression est environ égale à la pression hydrostatique. Exprimer la pression $p(z)$ respectivement sur les surfaces S_1 et S_2 .
4. Projetez l'équation (3) sur l'axe x , évaluez les intégrales restantes et trouvez une relation entre h_1 , h_2 , v_1 et v_2 .
5. On pose $\beta = v_1^2/gh_1$ nombre sans dimension. Ecrire la relation précédente sous la forme d'une équation du second degré sur α que l'on résoudra. Sous quelle condition sur β le phénomène est-il possible ?
6. Questions de réflexion (réponse en quelques mots) : pourquoi la relation de Bernoulli n'est elle plus valable ? Pourquoi la pression sur S_1 ou S_2 peut-elle être assimilée à la pression hydrostatique ?



Exercice 4.9 : Perte de charge dans un élargissement brusque

Soit une conduite cylindrique de section débouchant brusquement dans une autre de section supérieure. On suppose que l'écoulement du fluide incompressible et homogène se produit dans des conditions permettant les hypothèses suivantes :

- vitesses uniformes
- frottements négligeables sur les parois BC et B'C'
- régime permanent



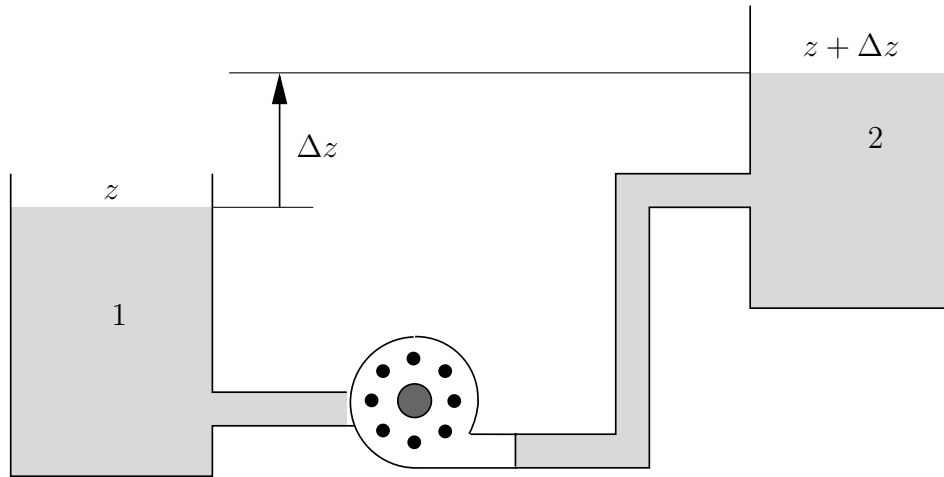
On veut calculer la perte de charge $h_v = H_1 - H_2$ (H_1 et H_2 charges en section d'entrée et de sortie respectivement). C'est la formule de Borda-Carnot.

1. Rappeler la définition de la charge H .
2. Exprimer la conservation du débit.
3. En utilisant le principe de conservation de la quantité de mouvement, calculer une approximation de h_v , en supposant que la pression au niveau des parois AB et A'B' est constante et peu différente de la pression d'entrée. Comment pourriez-vous justifier cette hypothèse ?
4. D'où vient physiquement la perte de charge ? Comment le fluide mort est-il mis en mouvement ?

Exercice 4.10 : Pompage d'un bac dans un autre

On pompe de l'eau, avec un débit volumique Q , depuis un réservoir 1 dont la surface est à l'altitude z vers un réservoir 2 identique, mais à l'altitude $z + \Delta z$. On connaît la perte de charge totale égale une hauteur équivalente h_v .

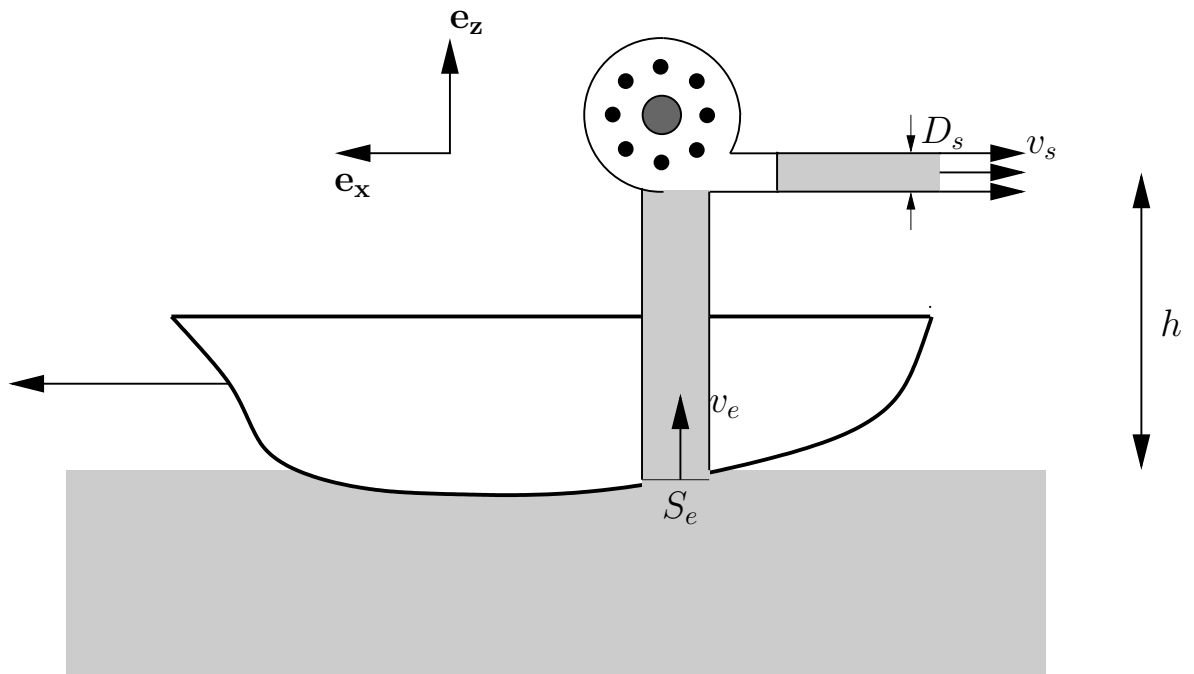
1. Donner l'expression de la puissance requise pour la pompe.
2. A.N. : $\Delta z = 20$ m, $h_v = 5$ m, $Q = 5$ l/s.



Exercice 4.11 : Propulsion d'un bateau

On cherche à propulser un bateau de masse M_B en pompant de l'eau sous le bateau avec un débit volumique Q et en l'éjectant horizontalement à une hauteur h au dessus du niveau de l'eau.

On appelle \mathbf{F} la force exercée par (l'eau de pompage + l'air extérieur + l'eau en contact avec la coque) sur le bateau.



1. Exprimer la composante horizontale F_x de \mathbf{F} en fonction de ρ , Q et S_e . On veillera à respecter le choix des axes de la figure

2. On souhaite que le bateau puisse atteindre une vitesse U en un temps Δt . Exprimer le débit volumique Q nécessaire (on supposera que le bateau ne subit aucune résistance de la part l'eau).
3. Quelle doit être la puissance de la pompe \dot{W}_u , sachant que la perte de charge totale est h_v ?
4. A.N. : on donne $U = 10$ km/h, $\Delta t = 10$ s, $M_B = 100$ kg, $D_s = 10$ cm, $h = 3$ m, $h_v = 50$ cm. Calculer Q et \dot{W}_u .
5. Exprimer la composante verticale F_z de \mathbf{F} en fonction de ρ , v_e , S_e , p_{atm} , p_e pression à l'entrée de la canalisation de pompage, V volume total de la tuyauterie.
6. Calculer p_e en utilisant la formule de Bernoulli, et en déduire F_z en fonction de ρ , Q , S_e et V .

Exercice 4.12 : Tondeuse à gazon (suite)

Finir l'exercice sur la tondeuse à gazon

Exercice 4.13 : Ecoulement forcé par de l'air sous pression (DS IFI 2009)

Au sein d'une installation industrielle, on doit pomper un liquide dans une citerne posée sur le sol, pour l'éjecter à l'atmosphère, à une hauteur H au dessus du sol, avec un débit volumique minimal Q dans une conduite de diamètre D . on note h_v la perte de charge totale exprimée en hauteur équivalente. Le liquide a la densité de l'eau.

1. Quelle est la puissance de la pompe nécessaire ? (figure 3) On la calculera dans le cas le plus défavorable, où la citerne est quasiment vide.

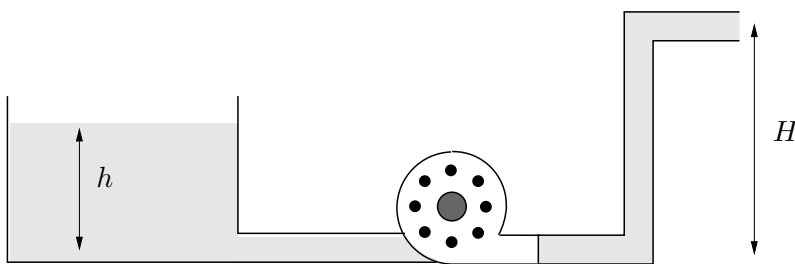


FIGURE 3 – Elévation du liquide par une pompe

2. On souhaite remplacer la pompe en mettant la citerne sous pression grâce à de l'air comprimé à une pression p_A (figure 4). Quelle valeur minimale doit avoir cette pression pour obtenir les mêmes conditions d'écoulement qu'à la question précédente.
3. A.N. : On donne $H = 4$ m, $h_v = 0.5$ m, $Q = 5$ l/s, $D = 5$ cm. Calculer la puissance de la pompe en W et p_A **en bar**.

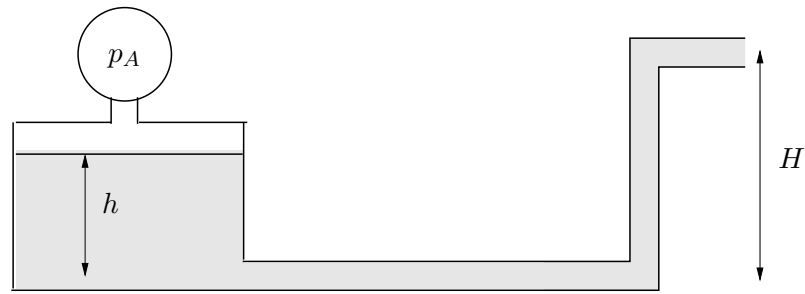


FIGURE 4 – Elévation du liquide par de l'air comprimé

Exercice 4.14 : Réseau de fluide (DS IFI 2010).

Un réseau de fluide est constitué par un bac dans lequel on pompe de l'eau, pour la faire monter à une hauteur H au-dessus du niveau dans le bac. La sortie est à l'atmosphère. L'eau circule à travers un élargissement et plusieurs coudes dans des conduites de section S . L'élargissement a pour section αS . On supposera la perte de charge négligeable dans ce dernier.

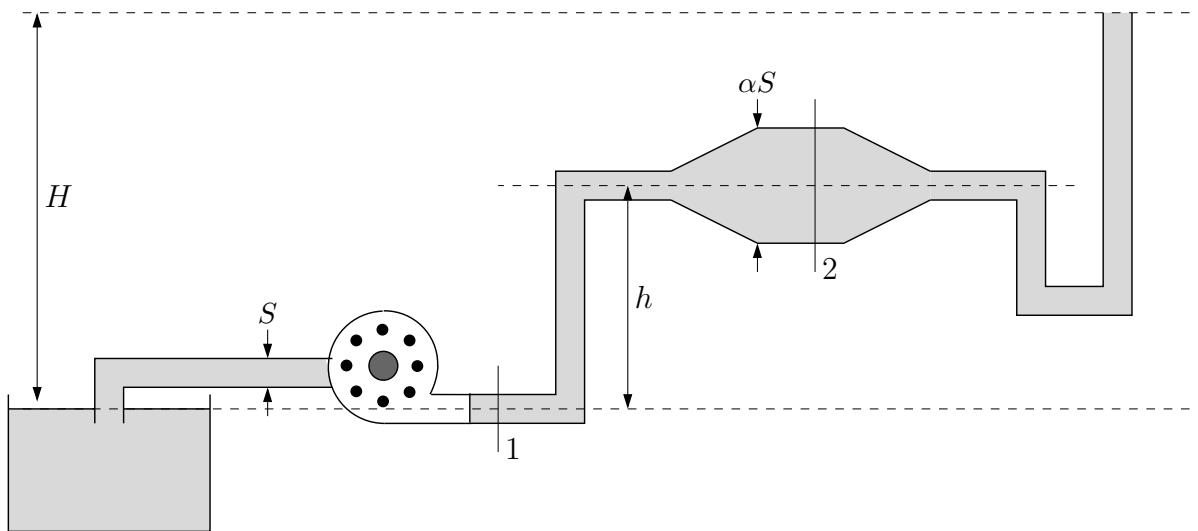


FIGURE 5 – Réseau de fluide

La perte de charge dans *chaque* coude est donnée, en hauteur équivalente, par :

$$h_v = \frac{v^2}{2g} e_v$$

où v est la vitesse du fluide dans le coude et e_v est le coefficient de frottement adimensionnel.

1. Calculer la puissance de la pompe pour avoir un débit de fluide Q dans le

réseau.

2. Calculer la pression en aval de la pompe (point 1). On donnera deux expressions : l'une dépendante, l'autre indépendante de la puissance de pompe. On notera p_{atm} la pression atmosphérique
3. Calculer la pression dans l'élargissement (point 2) indépendante de la puissance de la pompe.
4. A.N. : Conduites de diamètre $D = 1$ cm. Diamètre de l'élargissement 3 cm. $H = 1$ m. $h = 50$ cm. $Q = 10$ l/min. $e_v = 0.8$. Calculer la vitesse du fluide dans les conduites, la perte de charge dans un coude, la puissance de la pompe, et les pressions p_1 et p_2 .

Exercice 4.15 : Citerne (rattrapage IFI 2011).

Une citerne alimente un réseau d'eau dans une ferme, dont la structure est représentée sur la figure 6. Pour des contraintes géométriques, le réseau comporte plusieurs coudes, et une réduction de section brusque. L'extrémité est équipée d'une vanne de réglage. On note h la hauteur entre la surface libre dans la citerne et la sortie à l'atmosphère, D le diamètre du tuyau en amont de la réduction de section, et d le diamètre en aval. On notera $\alpha = d/D$.

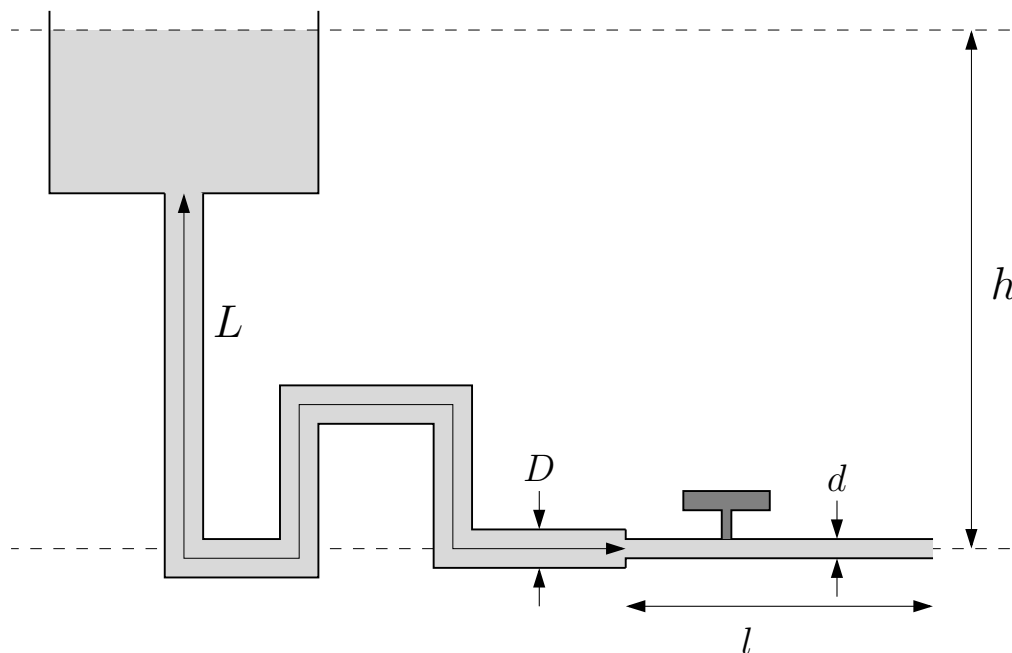


FIGURE 6 – Citerne alimentant un réseau

On note L la longueur totale de la conduite de grand diamètre, et l celle de petit diamètre. On notera respectivement V et v les vitesses dans les conduites de diamètre D et d .

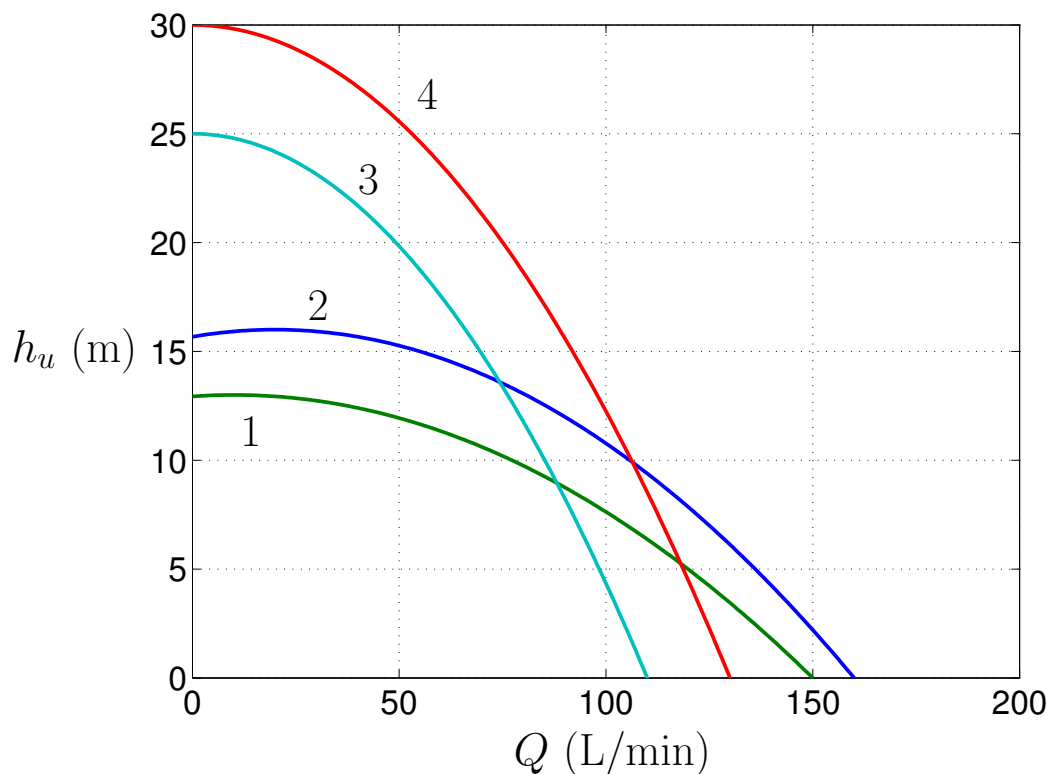
Pour les coefficients de perte de charge singulière, on prendra les expressions du photocopié. Pour les pertes de charges régulières on supposera a priori que l'écoulement

est turbulent et on utilisera la formule de Blasius $f = 0.3164/\text{Re}^{1/4}$ (voir domaines de validité dans le polycopié).

1. On suppose la vanne de réglage complètement fermée, de telle sorte que le fluide ne s'écoule pas. Quelle est la pression supportée par la vanne ?
2. La vanne est ouverte complètement et le fluide s'écoule avec un débit volumique Q . Exprimer une relation entre v , V et Q .
3. Rappeler (cf. poly) les expressions des coefficients de perte de charge singulière e_v dans un coude, un rétrécissement et une vanne, avec les notations de l'énoncé.
4. Exprimer les hauteurs de perte de charge h_v dans chaque coude, dans le rétrécissement, et dans la vanne (on fera bien attention à quelle vitesse, v ou V , on utilise dans les expressions). On ne prendra pas en compte la perte de charge au niveau du raccordement du tuyau au fond de la citerne (point A).
5. Exprimer la hauteur de perte de charge régulière dans la conduite de grand diamètre, et dans celle de petit diamètre (on fera bien attention aux vitesses, longueurs, diamètres, Reynolds, que l'on utilise dans les expressions).
6. En sommant toutes les pertes de charge du réseau, et en notant h_v la perte de charge totale, calculez la hauteur minimale h pour que le fluide s'écoule avec un débit volumique Q .
7. Application numérique :
 - Liquide = eau,
 - $L = 60$ m, $l = 10$ m,
 - $D = 4.5$ cm, $d = 2$ cm,
 - $Q = 1$ L.s⁻¹
 Calculez :
 - les vitesses v et V ,
 - les Reynolds dans les deux types de conduite, et vérifiez que l'écoulement est bien turbulent,
 - tous les $h_{v,i}$ (coudes, vanne, rétrécissement, pertes linéiques sur L , pertes linéiques sur l),
 - la perte de charge totale h_v ,
 - la hauteur h .
8. Pourquoi la perte de charge dans les coudes est-elle si faible ?
9. A quelle hauteur h_{jet} monterait le jet à la sortie du réseau si le tuyau était orienté vers le haut. Exprimez à nouveau l'expression de h trouvée à la question 6 en faisant intervenir cette dernière grandeur, et interprétez le résultat en termes énergétiques.
10. si la citerne était enterrée, et que l'on ait $h = 0$, quelle devrait être la puissance de la pompe utilisée pour obtenir le même débit (donner l'expression analytique puis la valeur numérique).

Exercice 4.16 : Choix d'une pompe.

On souhaite acheter une pompe pour pomper de l'eau dans un bac et la faire monter de 5 m, à travers une tuyauterie de 20 m de long et 3 cm de diamètre, avec un débit *au moins égal* à 100 L/min. Pour des contraintes d'espace, la tuyauterie comporte 5 coudes.



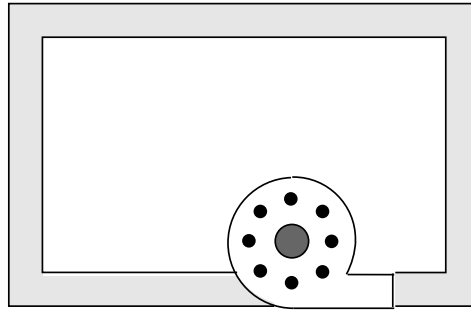
Un constructeur propose 4 pompes différentes, dont les caractéristiques débit/hauteur de charge sont présentées sur la figure ci-dessus.

Quelles sont celles qui répondent au cahier des charges ? Laquelle aurait votre préférence ?

Exercice 4.17 : Initiation aux réseaux de fluides.

On fait circuler de l'eau en boucle avec un débit $Q = 150$ L/min à l'aide d'une pompe, dans une tuyauterie de longueur $L = 200$ m et de diamètre $D = 3.5$ cm.

1. Calculer la hauteur de charge h_u devant être délivrée par la pompe en supposant la tuyauterie lisse (on utilisera la formule de Blasius et on justifiera sa pertinence).
2. La tuyauterie est en acier (rugosité $\epsilon = 46 \mu\text{m}$) Recalculer la hauteur de charge de la pompe h_u , en utilisant la formule explicite pour le coefficient de perte de



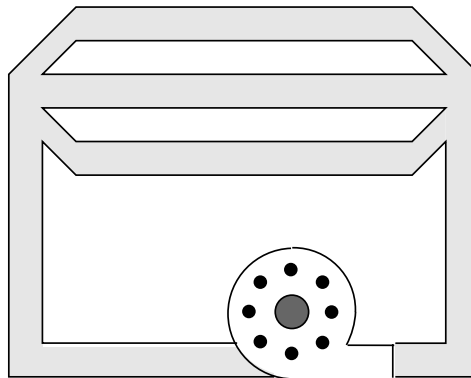
charge :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -1.8 \log_{10} \left[\frac{6.9}{\text{Re}} + \left(\frac{\epsilon/D}{3.7} \right)^{1.11} \right]$$

3. Vérifier les deux résultats à l'aide du diagramme de Moody.
4. On branche maintenant la pompe sur 3 tuyaux en parallèle de longueurs, diamètres, et rugosité respectifs L_i , D_i et ϵ_i pour $i = 1 \dots 3$. On veut imposer un débit Q donné dans la pompe. Ecrire le système d'équations à résoudre pour calculer :
 - la puissance de la pompe
 - les débits dans chaque branche

Ce système peut-il être résolu de façon analytique ?

(En cas de doute sur les équations à écrire, on remarquera que la charge, énergie mécanique par unité de volume, est définie de façon unique en un point du réseau...)



5. On suppose les 3 tubes identiques de longueur $L = 200$ m et de diamètre $D = 2$ cm. Calculez la puissance de la pompe pour imposer un débit de 100 L min^{-1} .

Exercice 4.18 : Tubes piézométriques sur une conduite (DS IFI 2019).

Pour toutes les questions, on donnera d'abord la formule littérale, puis la valeur numérique.

On considère le réseau de fluide (Fig. 7), constitué de tubes de mêmes diamètres D , alimenté par un bac d'eau à température ambiante, dont la surface est supposée très grande devant le diamètre des tubes.

- **Tout le réseau à partir du premier coude est supposé être dans un plan horizontal.** Ce plan est situé à une hauteur $H = 5$ m au-dessus de la surface libre dans le bac.
- La pompe est dimensionnée pour que le débit volumique dans le réseau soit égal à Q .
- Les pertes de charge singulières sont celles indiquées sur la figure : une prise d'eau dans le bac et $1 + 4 + 4$ coudes. On prendra les coefficients indiqués dans le photocopié.
- Les seules pertes de charge régulières à prendre en compte sont celles correspondant aux longueurs L_1 et L_2 .
- Les tubes piézométriques sont ouverts à l'atmosphère. L'écoulement débouche à l'atmosphère.
- On donne $D = 4$ cm, $Q = 57$ L/min, rugosité des tubes $\epsilon = 80$ μ m, $L_1 = 40$ m, $L_2 = 20$ m.

1. Calculez la vitesse de l'écoulement.
Donnez l'expression du nombre de Reynolds, puis calculez-le. L'écoulement est-il laminaire ou turbulent ?
2. Calculez le coefficient de pertes de charge régulières f (on précisera bien la formule utilisée).
Vérifiez votre résultat avec le diagramme de Moody fourni en annexe (à joindre à votre copie, avec votre nom sur la feuille).
3. Rappelez la grandeur que mesurent les tubes piézométriques (on ne demande pas la démonstration).
4. Calculez de proche en proche, en partant du tube 4 vers le tube 1, les hauteurs indiquées par les tubes piézométriques, mesurées par rapport au plan de l'écoulement (on utilisera la formule de Bernoulli généralisée).
Pour gagner du temps, on pourra donner les résultats littéraux sous la forme $h_4 = \dots$, $h_3 - h_4 = \dots$, $h_2 - h_3 = \dots$, $h_1 - h_2 = \dots$. Pour les applications numériques, on donnera en revanche les valeurs des h_i .
5. Calculez la hauteur de charge de la pompe et sa puissance.
6. Qu'observerait-on si on branchait un tube piézométrique juste en amont de la pompe ?

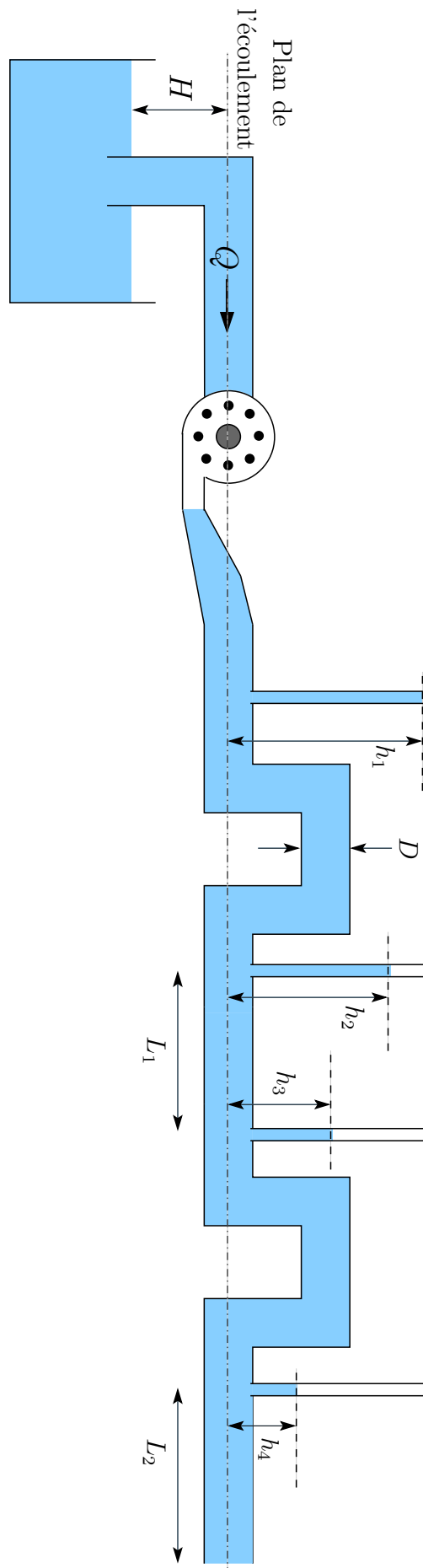


FIGURE 7 – Réseau

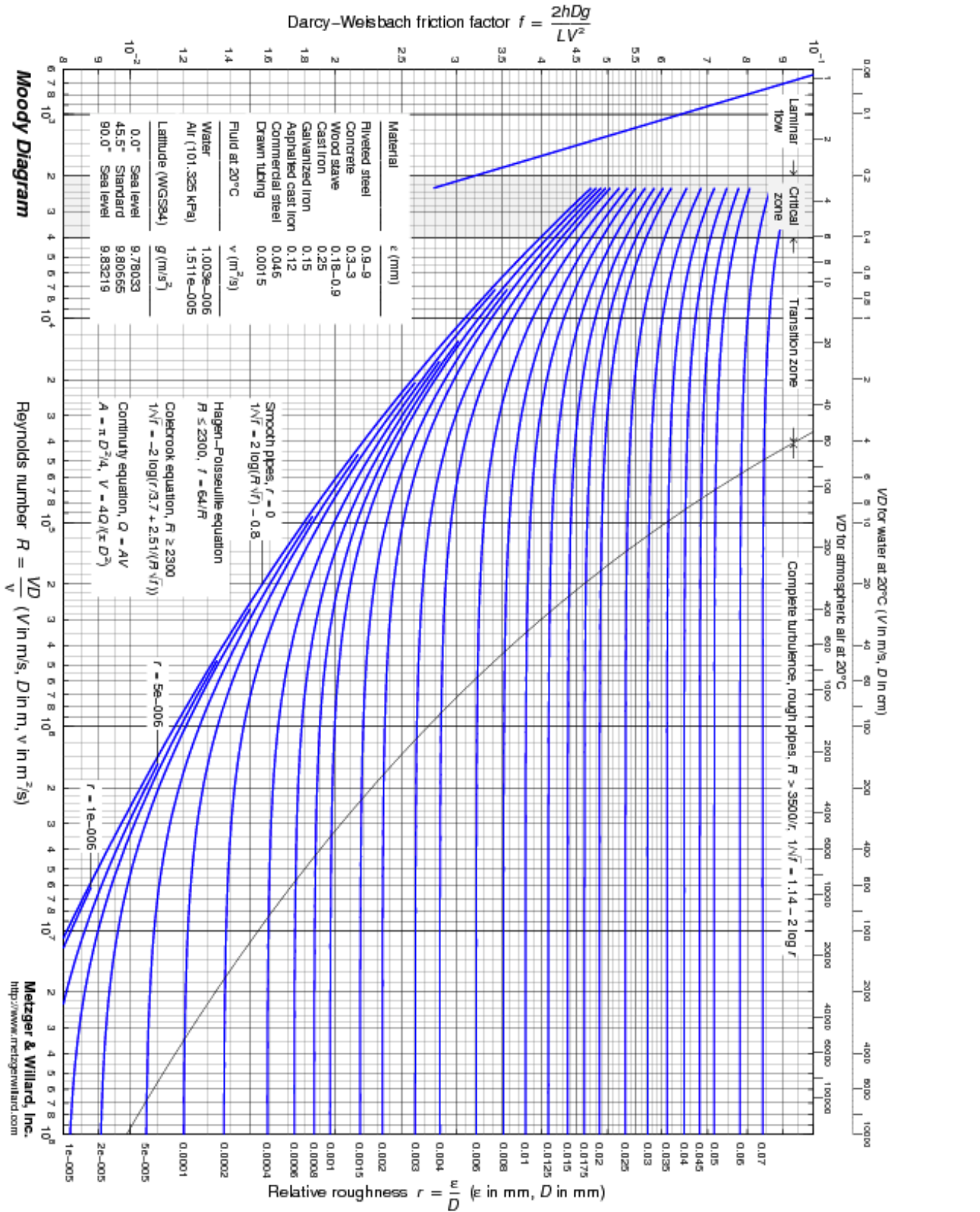


FIGURE 8 – Diagramme de Moody

Exercice 4.19 : Réseau urbain (adapté de DS IFI 2012)

On représente grossièrement (Fig. 9) l'alimentation en eau d'un quartier par un château d'eau alimentant un tuyau principal de diamètre D et de longueur L , et se séparant en plusieurs branches domestiques, supposées identiques. On suppose pour simplifier que chaque branche domestique est terminée par un robinet dont l'ouverture symbolise l'utilisation d'eau par le particulier. On suppose chaque branche domestique constituée par :

- N coudes
- une longueur l de tuyauterie de diamètre d .
- un robinet

On note h la hauteur entre la surface libre dans le château d'eau et la hauteur de sortie des robinets domestiques (on suppose des maisons sans étages). On utilisera les données suivantes :

- Liquide = eau à température ambiante,
- $L = 300$ m, $l = 15$ m, $h = 30$ m, rugosité des tuyaux $\epsilon = 50$ μm ,
- $D = 12$ cm, $d = 1$ cm, $N = 8$.

On donne les coefficients de perte de charge singulière $e_{v\text{coude}} = 0.8$ et $e_{v\text{robinet}} = 4.5$ (robinet complètement ouvert), et on néglige toutes les autres pertes de charge. Pour les pertes de charges régulières, on supposera a priori que l'écoulement est turbulent et on utilisera la formule de Colebrook simplifiée

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -1.8 \log_{10} \left[\frac{6.9}{\text{Re}} + \left(\frac{\epsilon/D}{3.7} \right)^{1.11} \right]$$

1. Un seul robinet domestique est ouvert. Exprimer la perte de charge H_v entre la surface libre de la citerne et l'extrémité de la conduite principale (point A), et h_v , celle dans la branche domestique (entre B et S).

Attention : On prendra garde au fait que les vitesses et les Reynolds sont différents dans des tuyauteries de sections différentes, et on fera bien attention aux vitesses, longueurs, diamètres, Reynolds, que l'on utilise dans les expressions.

On présentera les résultats sous la forme la plus simple possible, et on notera :

- V la vitesse de l'écoulement, F le coefficient de frottement, S la section du tube et Re le nombre de Reynolds en amont du robinet principal.
- v la vitesse de l'écoulement, f le coefficient de frottement, s la section du tube et re le nombre de Reynolds en aval du robinet principal.

2. Ecrivez la formule de Bernoulli généralisée entre la surface libre dans le château d'eau et la sortie de la branche domestique (la perte de charge liée à la division/rétrécissement sera négligée), et en déduire une expression de h en fonction de h_v , H_v et v . Cette équation est-elle solvable à la main pour trouver le débit Q ? A quel problème de calcul numérique revient-elle?

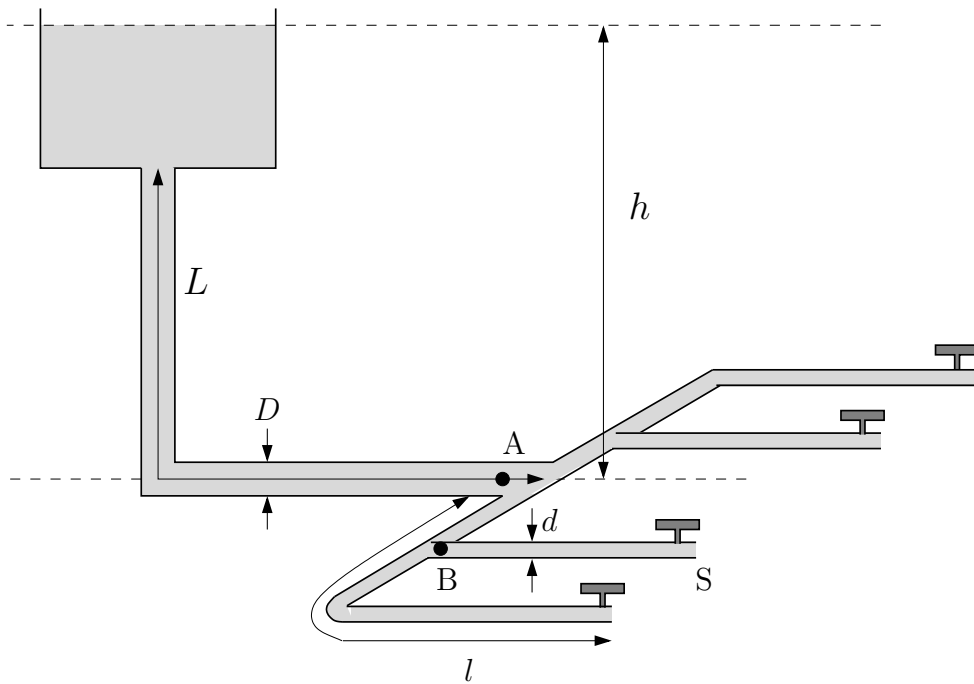


FIGURE 9 – Réseau urbain

3. Donnez l'expression de la pression au bout de la conduite principale (point A), puis celle au début de la conduite domestique (point B).
4. Avec les données fournies, on trouve comme solution numérique de l'équation exprimée à la question 2 : $Q = 14.60$ L/min.
Calculez alors les valeurs numériques de v , V , re , Re , f , F , h_v , H_v et $v^2/(2g)$ (avec au moins 3 chiffres significatifs).
Vérifiez que H_v et $v^2/(2g)$ peuvent être négligés devant h_v . Comment pouvez-vous simplifier l'équation obtenue à la question 2? Que cela signifie-t-il physiquement?
5. Afin de pouvoir résoudre le problème à la main, on suppose, *en plus de l'approximation de la question précédente*, que le coefficient de frottement f est quasiment indépendant du Reynolds et égal à une constante f_0 .
Réécrivez l'équation de la question 2, et résolvez-la pour exprimer la vitesse v dans la branche domestique. On pourra poser :

$$e_0 = f_0 \frac{l}{d} + N e_{v\text{coude}} + e_{v\text{robinet}}$$

Réécrire v en fonction de la vitesse que donnerait la formule de Torricelli, puis le débit volumique Q . Commentez.

6. Prendre $f_0 = 0.033$ et calculez la valeur approximée du débit Q en L/min. Quelle est l'erreur relative en % effectuée sur Q avec cette approximation par rapport à la valeur proposée à la question 4?
7. Plusieurs maisons tirent maintenant de l'eau. On suppose donc que 4 robinets sont simultanément ouverts aux extrémités de 4 branches toujours supposées identiques.

On note toujours Q le débit total et q le débit dans chaque branche.

Ecrivez la relation entre q et Q .

8. Reprendre la question 2.
9. Simplifiez le résultat avec les mêmes approximations que précédemment et déduisez-en le débit q dans chaque branche. Qu'en concluez-vous par rapport au cas où un seul robinet est ouvert ?

Ce résultat correspond-il à votre expérience quotidienne ? Commentez.

10. La pression en un point B d'une branche ouverte est-elle dépendante du nombre de branches ouvertes ? Quelle est sa valeur approximative ? Quel sens ce résultat donne-t-il à l'assertion du plombier : "*vous avez N bar de pression sur votre réseau*" ? Calculez-la numériquement.
11. La compagnie d'eau veut assurer une pression domestique supérieure à ses clients. Pour cela, on place une pompe sur-presseuse dans le circuit sur la grosse tuyauterie. On connaît la caractéristique de la pompe sous la forme :

$$h_u = h_M \left[1 - \left(\frac{Q}{Q_m} \right)^2 \right]$$

où $h_M = 20$ m et $Q_m = 1000$ L/min sont des données constructeur.

Dans les questions suivantes, on considérera que n robinets sont ouverts.

Ecrivez, sans aucune approximation, la formule de Bernoulli généralisée entre la surface libre et la sortie, et exprimez le résultat sous la forme d'une relation entre h , h_u , H_v , h_v et v .

12. On notera à nouveau q le débit dans chaque branche. En utilisant les mêmes approximations que dans les questions précédentes ($H_v \ll h_v$, $v^2/(2g) \ll h_v$ et $f \simeq f_0$), trouvez une expression du débit sous la forme :

$$\frac{q}{Q_m} = f \left(\frac{h}{h_M}, \Pi, n \right)$$

où Π est un nombre adimensionnel que l'on exprimera.

13. Exprimer la pression domestique p_B , ainsi que la puissance fournie au fluide par la pompe.
14. Avec 10 branches ouvertes, calculez numériquement q et Q en L/min, p_B en bar, h_u , ainsi que la puissance fournie au fluide par la pompe.

Exercice 4.20 : Remplissage d'un wagon-citerne (d'après DS IFI 2013)

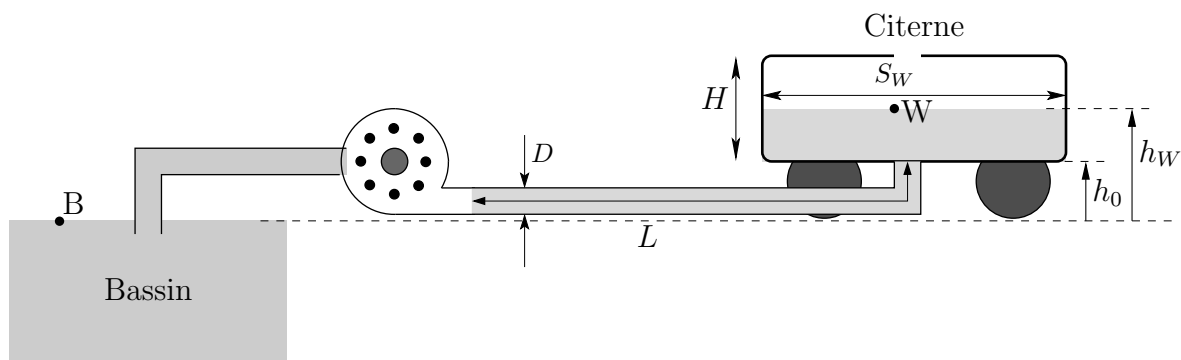
Pour différentes opérations de maintenance et nettoyage des voies ferrées, des wagons-citernes sont convoyés et remplis localement à l'aide d'une pompe puisant de l'eau dans un bassin de réserve. L'opération de remplissage est assez longue et nécessite une logistique contraignante. On cherche dans cet exercice à estimer le temps de remplissage d'un de ces wagons-citerne.

La surface du bassin reste constante au cours du remplissage. La pompe est supposée fournir une hauteur de charge utile $h_u = 10$ m indépendante du débit. On néglige les pertes de charge en amont de la pompe. et en aval, on a une tuyauterie de diamètre $D = 4$ cm, de longueur $L = 30$ m, et de rugosité $\epsilon = 200$ μm . Pour calculer la perte de charge linéique, on prendra la corrélation :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -1.8 \log_{10} \left[\frac{6.9}{\text{Re}} + \left(\frac{\epsilon/D}{3.7} \right)^{1.11} \right]$$

Par ailleurs, cette tuyauterie est accidentée par 5 coudes à angle droit (coefficient de perte de charge pour chaque coude $e_v = 0.8$).

Le haut du wagon est percé et en contact avec l'atmosphère. On supposera la citerne parallélépipédique de longueur 15 m, de largeur 2 m et de hauteur $H = 2$ m. On notera S_W la surface horizontale de la citerne et h_W l'altitude de la surface libre dans cette dernière par rapport à celle du bassin.



1. Ecrire la relation de Bernoulli généralisée entre la surface du bassin B et la surface libre dans le wagon W , en supposant le régime permanent. On notera v_W la vitesse de la surface libre dans le wagon et on notera la perte de charge totale h_v .
2. On pourra admettre le résultat de cette question pour continuer le problème.
A l'aide de la conservation du débit, écrire une relation entre la vitesse v dans le tuyau et v_W .
En déduire que même en ne considérant que la perte de charge occasionnée par les coudes, on a $v_W^2/(2g) \ll h_v$.

3. Simplifier en conséquence la relation obtenue à la question 1.

Montrer si le coefficient de frottement f est à peu près indépendant de la vitesse (on notera f_0 sa valeur), la vitesse dans le tube s'exprime sous la forme :

$$v = \sqrt{2G(h_u - h_W)} \quad (4)$$

où G est une constante que l'on exprimera en fonction de g , f_0 , L , D , e_v .
Donnez l'unité de G et interprétez physiquement le résultat.

4. On s'attend à des Reynolds compris entre 50000 et 500000. Calculez les valeurs correspondantes du coefficient de frottement (avec 3 chiffres significatifs). L'hypothèse $f \simeq f_0$ indépendante de la vitesse est-elle justifiée ? On prendra par la suite $f_0 = 0.031$. Donnez alors la valeur de G .
5. En utilisant la question 2, reliez la vitesse v à dh_W/dt , et déduisez-en l'équation différentielle ordinaire vérifiée par h_W .
6. Résoudre cette EDO, et donnez l'expression de $h_W(t)$. On suppose le wagon-citerne initialement vide et que le fond de la citerne est à une hauteur $h_0 = 1$ m au-dessus de la surface du bassin.

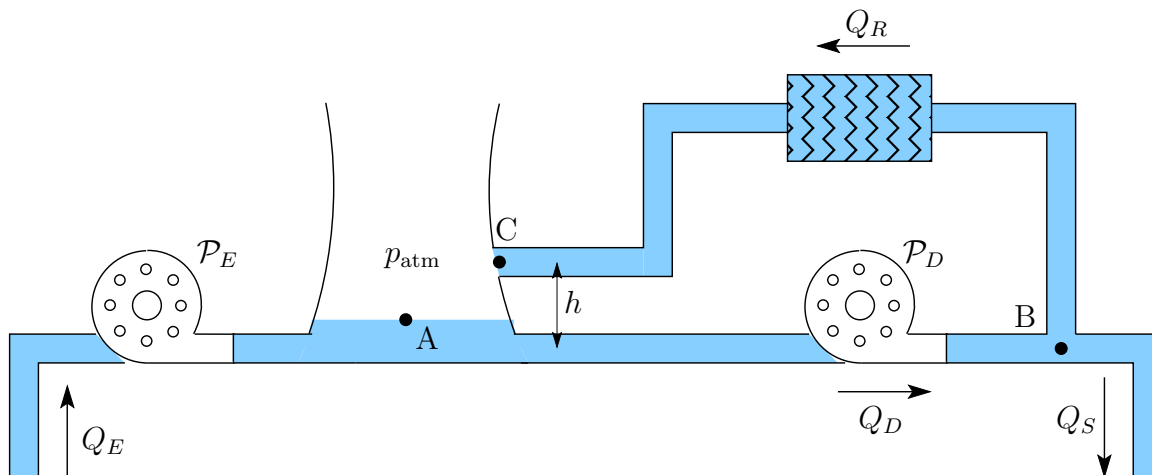
Il est conseillé de réécrire au préalable l'EDO sous forme adimensionnelle en posant :

$$h^* = \frac{h_u - h_W}{h_u - h_0} \quad \text{et} \quad t^* = t \frac{S}{S_W} \sqrt{\frac{2G}{h_u - h_0}}$$

7. Déduisez-en le temps de remplissage, sous forme analytique, puis numériquement en secondes.

Exercice 4.21 : Circuit de refroidissement tertiaire d'une centrale nucléaire.

Le circuit le plus externe de refroidissement des centrales nucléaires nécessite un énorme débit d'eau dans l'échangeur de chaleur avec le circuit secondaire. Afin de limiter le prélèvement d'eau dans l'environnement, on réalise le circuit en boucle fermée représenté ci-dessous. L'entrée Q_E représente l'eau de la rivière, la sortie Q_S symbolise l'eau rejetée à la rivière. On néglige l'eau évaporée dans la tour de refroidissement.



1. *Question préliminaire : (on pourra admettre le résultat de cette question)*
Montrez que pour une branche traversée par un débit volumique Q , contenant des changements de section et des pertes de charge régulières de coefficient f_i et singulières de coefficients e_{vj} en série, on peut exprimer la perte de charge totale sous la forme :

$$h_v = \frac{Q^2}{2gS^2} F \quad (5)$$

où la section moyenne est définie par :

$$\frac{1}{S^2} = \sum_i \frac{1}{S_i^2} + \sum_j \frac{1}{S_j^2}$$

et F est un coefficient de perte de charge moyen que l'on exprimera.

Sous quelle hypothèse peut-on considérer que F est une constante par rapport au débit Q ?

2. On pose $x = Q_E/Q_R$. En utilisant la conservation du débit volumique, exprimez les rapports Q_D/Q_R et Q_E/Q_D en fonction de x .
3. Expliquez d'après les contraintes du problème pourquoi on doit avoir $x \ll 1$
4. A l'aide de la formule de Bernoulli généralisée sur les branches AB et BC, calculez la hauteur de charge h_{uD} que doit délivrer la pompe \mathcal{P}_D .
On utilisera la question 1, et on notera S_D et S_R les sections moyennes des branches Q_D et Q_R , F_D et F_R leur coefficients de perte de charge moyens, et S_C la section au point C.

5. On pose :

$$h_u^* = h_{uD} \frac{2gS_R^2}{F_R Q_R^2} \quad \text{et} \quad h^* = h \frac{2gS_R^2}{F_R Q_R^2}$$

A l'aide de la question 2, montrez que le résultat précédent peut être écrit sous forme adimensionnelle sous la forme :

$$h_u^* = \epsilon_1 (x + 1)^2 + 1 + h^* + \epsilon_2 \quad (6)$$

où ϵ_1 et ϵ_2 sont des nombres sans dimension que l'on écrira.

6. D'après les résultats de la question 1, expliquez pourquoi à votre avis $S_R \ll S_C$ et $F_R \gg 1$. On se rappellera qu'un échangeur est un réseau de tubes coudés de petite section.

En déduire que ϵ_2 peut être négligé

7. En déduire l'expression de $x = Q_E/Q_R$ et de Q_D/Q_R .

8. A cause de l'échangeur, la perte de charge dans le circuit de retour (branche Q_R) est bien supérieure à celle dans la branche directe (branche Q_D). Que vaudraient ϵ_1 et h_u^* à la limite où cette dernière perte de charge serait nulle ?

9. Quelle hauteur a-t-on utilisé pour adimensionnaliser h_u et h à la question 5 ? (utile pour calculer h^* et h_u ci-dessous).

Le débit dans l'échangeur est de $40 \text{ m}^3/\text{s}$, le débit prélevé dans la rivière de $2 \text{ m}^3/\text{s}$ et $h = 5 \text{ m}$. On suppose que la perte de charge totale dans la branche retour vaut $\Delta p = 2 \text{ bar}$, et 10 fois moins dans la branche aller.

Calculer ϵ_1 , x , la hauteur de perte de charge h_{vR} dans la branche retour, h^* , h_u^* , Q_D , h_u , et enfin la puissance de la pompe \mathcal{P}_D . Commentez ce résultat dans son contexte.

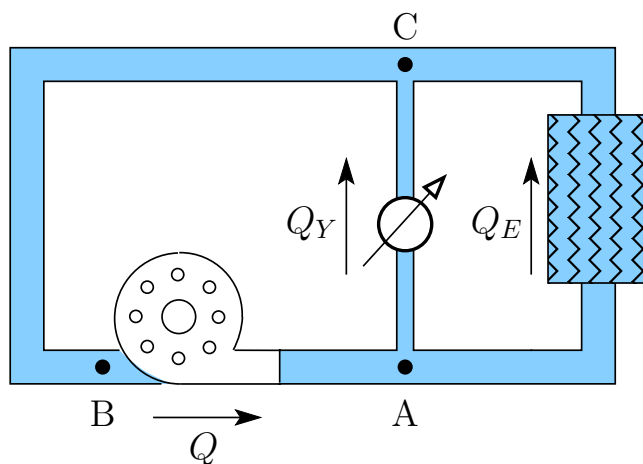
10. Le point A est à 5 m au dessus du niveau de la rivière, l'eau est acheminée par la pompe \mathcal{P}_E à travers un tuyau en béton de rugosité 1 mm , de longueur 500 m , et de diamètre 1 m .

Calculez la vitesse du fluide, le Reynolds, le coefficient de perte de charge, la hauteur de perte de charge, et le débit de la pompe \mathcal{P}_E .

Exercice 4.22 : By-pass.

Une pompe débite de l'eau dans un échangeur destiné à chauffer de l'air. Afin de pouvoir régler le débit dans l'échangeur Q_E , on branche en parallèle sur dernier un court-circuit (by-pass) contenant une vanne de réglage. On note Q_Y le débit dans le by-pass, Q_E le débit dans l'échangeur, Q le débit dans la pompe, et h_u sa hauteur de charge.

- Entre les points C et B , on suppose qu'il y a un tube de longueur L_0 , de diamètre D_0 , de section S_0 dont on notera f_0 le coefficient de pertes de charge ;
- Le point B est situé immédiatement en amont de la pompe, et on néglige la perte de charge entre la sortie de la pompe et A .
- On considérera la perte de charge dans l'échangeur comme une perte de charge singulière de coefficient e_{vE} , la référence de vitesse étant celle au niveau de sa section de raccord. On notera S_E cette dernière.
- On note e_{vY} le coefficient de perte de charge de la vanne et e_{vY_0} celui lorsqu'elle est complètement ouverte. Dans la branche de la vanne, on négligera la perte de charge liée au tube. On notera S_Y la section de raccord de la vanne.
- On supposera tous les coefficients de pertes de charge indépendants du Reynolds.



1. A l'aide de la formule de Bernoulli généralisée, exprimez la différence de charge $H_A - H_C$ de 3 façons différentes.
2. On pose $x = Q_E/Q$. Exprimez les rapports Q_Y/Q et Q_Y/Q_E en fonction de x .
3. On note $\alpha = \frac{e_{vE}}{e_{vY}} \left(\frac{S_Y}{S_E} \right)^2$. En utilisant la question 1, exprimez α en fonction de x , puis x en fonction de α .
4. Indiquez les valeurs de x lorsque la vanne est 1 - complètement ouverte 2 - complètement fermée. On notera $\alpha_0 = \frac{e_{vE}}{e_{vY_0}} \left(\frac{S_Y}{S_E} \right)^2$
Déduisez-en le rapport (débit minimal / débit maximal) dans l'échangeur.

5. A l'aide de la question 1, écrivez la hauteur de charge h_u que doit avoir la pompe en fonction du débit total Q , et des grandeurs x , e_{vE} et S_E , et les grandeurs relatives à la branche BC.
6. On négligera désormais la perte de charge sur BC ($f_0 = 0$). Déduire de la question précédente l'expression de la puissance nécessaire de la pompe, et celle lorsque la vanne du bypass est complètement fermée.
7. Le diamètre de raccord de l'échangeur est $d_E = 20$ mm. Le coefficient de pertes de charge n'est pas donné directement, mais le constructeur indique une perte de charge $\Delta p_0 = 0.5$ bar lorsque l'échangeur est traversé par un débit de $Q_0 = 5$ m³/h. Calculez numériquement le coefficient de pertes de charge de l'échangeur e_v , et la puissance \dot{W}_u que doit délivrer la pompe lorsque la vanne du bypass est complètement fermée et que le débit dans l'échangeur est de 8 m³/h.
8. On veut dimensionner la vanne de façon à pouvoir réduire le débit dans l'échangeur d'un facteur jusqu'à 2 par rapport au débit maximal. En utilisant les questions 3 et 4, calculez α_0 .
Déduisez-en la valeur maximale du coefficient de pertes de charge de la vanne e_{vY_0} , sachant que son diamètre de raccord est $d_Y = 3$ cm.
9. Les fournisseurs de vannes ne donnent pas e_{vY} directement, mais le K_V , qui est le débit en m³/h donnant une perte de charge de **1 bar** aux bornes de la vanne traversée par de l'eau lorsqu'elle est grande ouverte.
Donnez une relation donnant K_v en fonction de e_{vY_0} (attention aux conversions d'unités), puis calculez le K_v minimal que doit avoir la vanne.

Exercice 4.23 : Barrage à stockage gravitaire (d'après DS IFI 2017)

Le barrage de Grand'Maison en Isère est constitué par 2 bassins entre lesquels sont placées 12 turbines. Parmi ces dernières, 8 sont réversibles et peuvent fonctionner en pompes, afin de pouvoir remonter de l'eau dans la retenue amont, et de stocker ainsi de l'énergie quand la demande est faible. Les surfaces libres des bassins sont très largement supérieures aux diamètres des canalisations, et distantes d'une dénivelée $h = 920$ m.

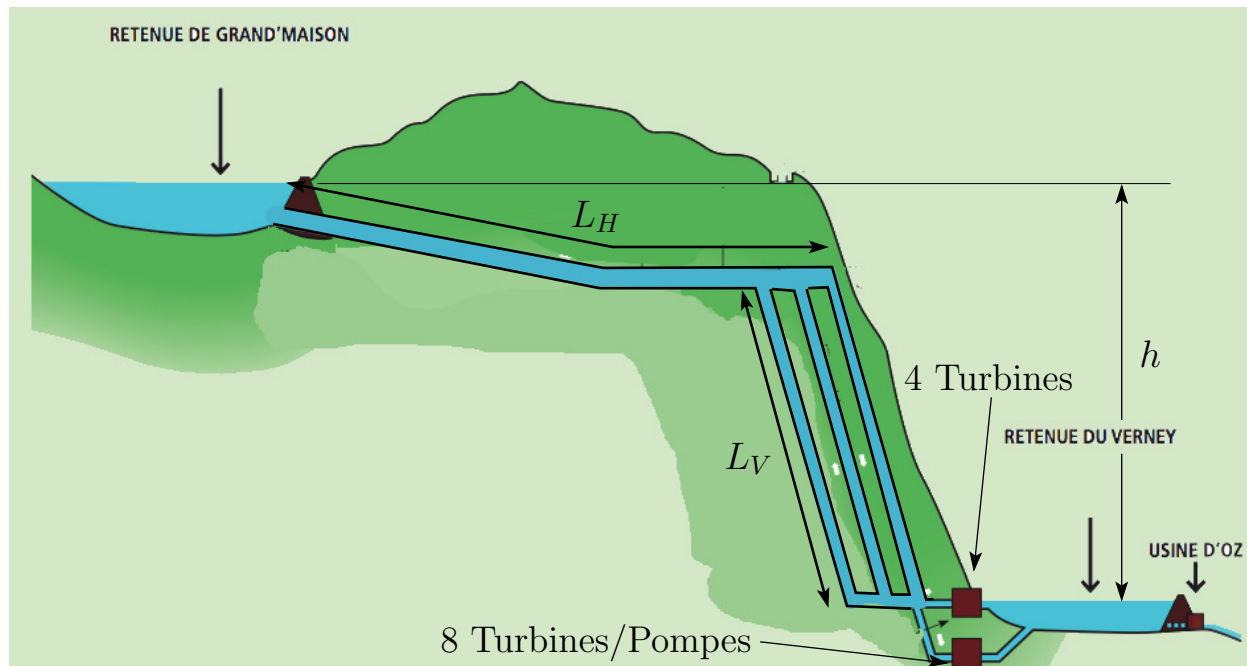


FIGURE 10 – Barrage de Grand'Maison (Isère). Adaptation fiche de communication EDF. Copyright EDF.

La canalisation entre les deux barrages est constituée :

- d'un tronçon quasi-horizontale de longueur $L_H = 7.1$ km et de diamètre $D_H = 7.1$ m.
- d'un tronçon incliné constitué de 3 conduites identiques en parallèle, de longueur $L_V = 1.45$ km et de diamètre $D_V = 3$ m.

La rugosité est identique pour toutes les conduites et vaut $\epsilon = 1$ mm.

Pour chaque question, on donnera les résultats d'abord sous forme littérale, puis on fera l'application numérique. On utilisera l'indice "H" pour la canalisation horizontale, et "V" pour une canalisation verticale. Tout manquement à ces consignes sera sanctionné.

Production

En production, le débit descendant vaut $Q = 215$ m³/s.

1. Calculer la vitesse de l'eau dans la canalisation horizontale et dans chaque canalisation verticale, ainsi que les nombres de Reynolds associés.
2. Calculer les coefficients de pertes de charge régulières f_H et f_V pour chaque tronçon, les hauteurs de perte de charge correspondantes h_H et h_V , et la hauteur de pertes de charge totale.

On pourra utiliser la formule de Haaland.

On supposera que seules ces pertes de charge sont significatives, et que toutes les pertes singulières sont négligeables.

3. A l'aide du théorème de Bernoulli généralisé, calculer la puissance \mathcal{P}_T que l'on peut extraire du fluide avec les turbines.

Pour information, la capacité officielle de cette centrale est de 1800 MW...

4. Calculer numériquement :
 - la puissance perdue à cause des pertes de charge en MW.
 - l'énergie perdue par jour en MWh
 - le coût journalier des pertes de charge en Euros pour ce barrage (on prendra un prix à la vente moyen de 100 Euros/MWh).

Stockage

En stockage, le débit ascendant vaut $Q = 135 \text{ m}^3/\text{s}$.

5. Reprendre la question 1 (vitesses et Reynolds)
6. Reprendre la question 2 (pertes de charge)
7. Calculer la puissance que doit délivrer chaque pompe. On rappelle qu'il y en a huit.

5 Equations de Navier-Stokes. Ecoulements rampants.

Exercice 5.1 : Ecoulement de Couette

On considère une hauteur h de liquide incompressible cisailé entre deux plaques (Fig. 5.1). On s'assure que la plaque supérieure soit animée d'une vitesse U_0 dans la direction x , tandis que la plaque inférieure est fixe. On suppose que l'extension du fluide dans la direction y est infinie, et la pesanteur dirigée suivant $-z$.

On s'intéresse dans cet exercice au mouvement stationnaire.

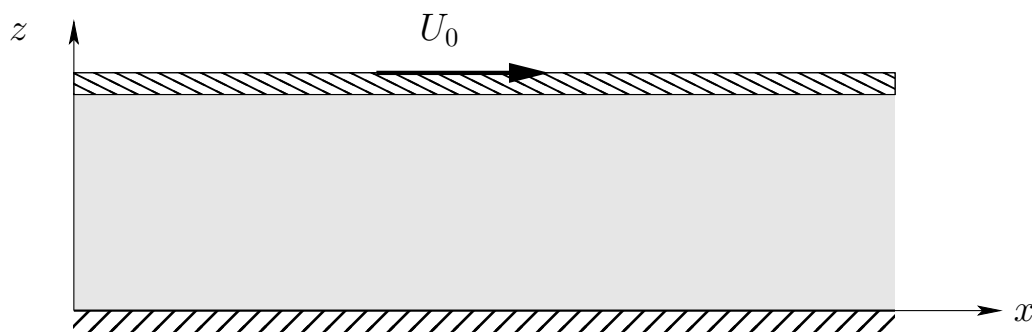


FIGURE 11 – Ecoulement de Couette.

1. Quelle est la forme la plus simple du champ de vitesses que l'on puisse imaginer? Ecrire le champ de vitesses correspondant. Ecrire les conditions aux frontières que doit vérifier ce champ de vitesses.
2. Ecrire les équations de Navier-Stokes en cartésiennes et projetez-les sur les trois axes. Comment varie le champ de pression suivant y et z ?
3. En imaginant une réalisation complète de l'expérience, notamment l'amont et l'aval, comment varie la pression suivant x ?
4. En déduire la résolution de l'équation de NS projetée suivant x et en déduire le profil de vitesse.
5. Calculer les tenseurs vitesse de déformation et des contraintes et en déduire la force tangentielle exercée par une longueur L et une largeur l de plaque mobile sur le fluide. Même question pour la force exercée par le fond sur le fluide.
6. Reprendre les deux dernières questions en régime instationnaire. La force est-elle plus grande ou plus petite aux temps courts?

Exercice 5.2 : Ecoulement de Poiseuille

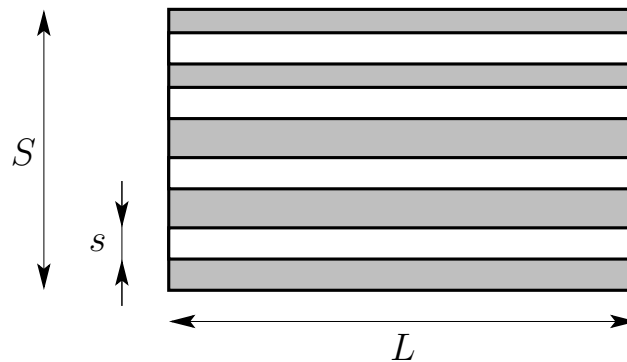
On considère l'écoulement d'un fluide incompressible dans un tube de section circulaire.

1. Ecrire la forme la plus simple possible du champ de vitesses, par des considérations de symétrie et l'équation de conservation de la masse.
2. Ecrire les équations de Navier-Stokes en coordonnées cylindriques, ainsi qu'une condition frontière. Déterminez le champ de vitesse.
3. Calculez le débit volumique Q et à la vitesse moyenne dans la section du tube. Déduisez-en le coefficient de perte de charge.
4. Du point de vue énergétique, vaut-il mieux faire passer le même débit dans N petits tuyaux de section S/N ou un seul gros de section S . On pourra raisonner en branchant une pompe aux bornes des deux systèmes et en comparant les puissances nécessaires. Expliquer le résultat physiquement ?
5. Une loi très utile pour trouver le champ de vitesses dans un milieu poreux est la loi de Darcy :

$$\mathbf{v} = -\frac{K}{\eta} \mathbf{grad} p$$

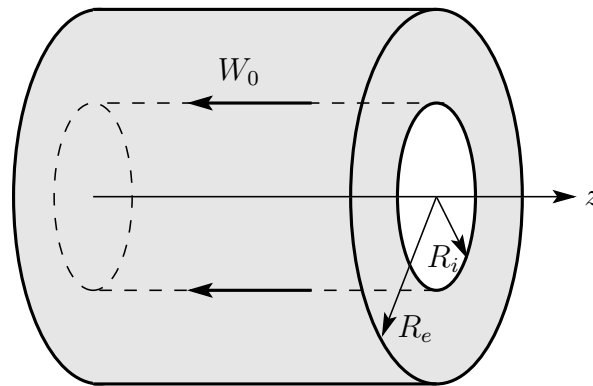
Comment cette loi se justifie-t-elle au vu des questions précédentes ?

- On pourra raisonner en 1D, et considérer un petit morceau de milieu poreux de longueur L , et de section S , considéré comme un entassement de petits tubes de longueur L et de section s , à raison de n tubes par unité de surface.
- On calculera la vitesse moyenne du fluide dans le milieu poreux à partir du débit dans cette section S . On note ϵ la porosité du milieu, c'est-à-dire le volume des pores divisé par le volume total.



Exercice 5.3 : Ecoulement de Couette-Poiseuille cylindrique

On considère du fluide enfermé entre deux cylindres concentriques de rayons R_i et R_e , et de longueur L suivant l'axe Oz . Le cylindre externe est fixe, tandis que le cylindre interne se déplace suivant Oz avec une vitesse $-W_0 \mathbf{e}_z$. Par ailleurs on applique une surpression Δp à l'entrée par rapport à la sortie. On négligera la pesanteur dans tout le problème.



1. Approche intuitive : quels sont les deux moteurs du mouvement ? Dessinez approximativement la forme du champ de vitesse entre les deux cylindres.
2. Reprendre brièvement la formulation effectuée dans l'exercice 5.2. Quelle est la principale modification ?
3. Déterminer le champ de vitesses et l'exprimer sous forme adimensionnelle. On séparera les deux termes représentant respectivement la partie Couette et la partie Poiseuille de l'écoulement et on utilisera les nombres sans dimension :

$$\alpha = \frac{R_i}{R_e} \quad r^* = \frac{r}{R_e} \quad \Pi = \frac{\Delta p R_e^2}{\eta L W_0}$$

Tracez le profil de vitesses pour $\alpha = 9/10$, et quelques valeurs de Π .

4. En étudiant la pente du profil de vitesses sur le cylindre extérieur (en $r = R$), montrer qu'une partie du profil de vitesse est orienté vers la droite lorsque :

$$\Pi > \frac{2}{-\ln \alpha - (1 - \alpha^2)/2}$$

(on admettra sans démonstration que la fonction de α ci-dessus est toujours positive). Que signifie cette condition ?

5. Calculez le débit de l'écoulement entre les deux cylindres. On admettra que :

$$\int x \ln x \, dx = \left(\ln x - \frac{1}{2} \right) \frac{x^2}{2}$$

6. Calculez la force longitudinale exercée par le fluide sur le cylindre intérieur. On prendra en compte la force tangentielle sur les cotés et les forces de pression sur les extrémités.

Exercice 5.4 : Ecoulement de Couette circulaire

On considère du fluide enfermé entre deux cylindres concentriques de rayons R_i et R_e , et d'axe Oz . Le cylindre externe est fixe, tandis que le cylindre interne est mis en rotation avec une vitesse angulaire ω . La pesanteur est orientée suivant $-z$ et on suppose la hauteur h du cylindre très grande devant R_i et R_e

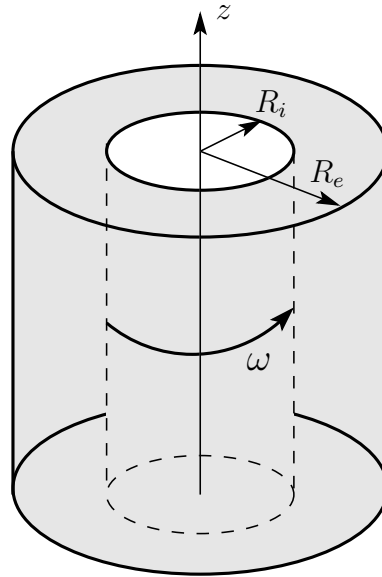


FIGURE 12 – Ecoulement de Couette cylindrique.

1. Quelle est la forme la plus simple du champ de vitesses que l'on puisse imaginer, en coordonnées cylindriques ? Simplifier l'expression du champ de vitesses par des considérations de symétrie et l'équation de conservation de la masse.
2. Par des considérations de symétrie, indiquer de quelle(s) variable(s) spatiale(s) dépend le champ de pression.
3. Résoudre les équations de Navier-Stokes en cylindriques avec les conditions aux limites adéquates, et en déduire le champ de vitesses.
4. Calculer le couple exercé par le fluide sur le cylindre intérieur. A quoi peut bien servir cette configuration expérimentale ? En quoi est-elle supérieure à l'écoulement de Couette classique ?

Exercice 5.5 : Ruissellement laminaire

Une couche de liquide d'épaisseur d'épaisseur uniforme h s'écoule sur une plaque inclinée faisant un angle α avec l'horizontale. On suppose l'écoulement unidirectionnel et stationnaire.

1. Ecrire et simplifier les équations de Navier-Stokes dans le repère Oxz
2. Calculer le champ de pression dans le fluide
3. Ecrire l'équation régissant l'écoulement et les conditions frontières pour la vitesse (réfléchissez bien à celle sur la surface libre ...). Déterminez le champ de vitesses et tracez-le.
4. Calculez le débit volumique par unité de largeur et la vitesse moyenne.
5. (question subsidiaire) Au vu de l'équation et des conditions aux frontières décrivant le profil de vitesse (question 3), à quel problème de thermique le présent problème est-il semblable ? Pouvait-on prévoir ce résultat ?

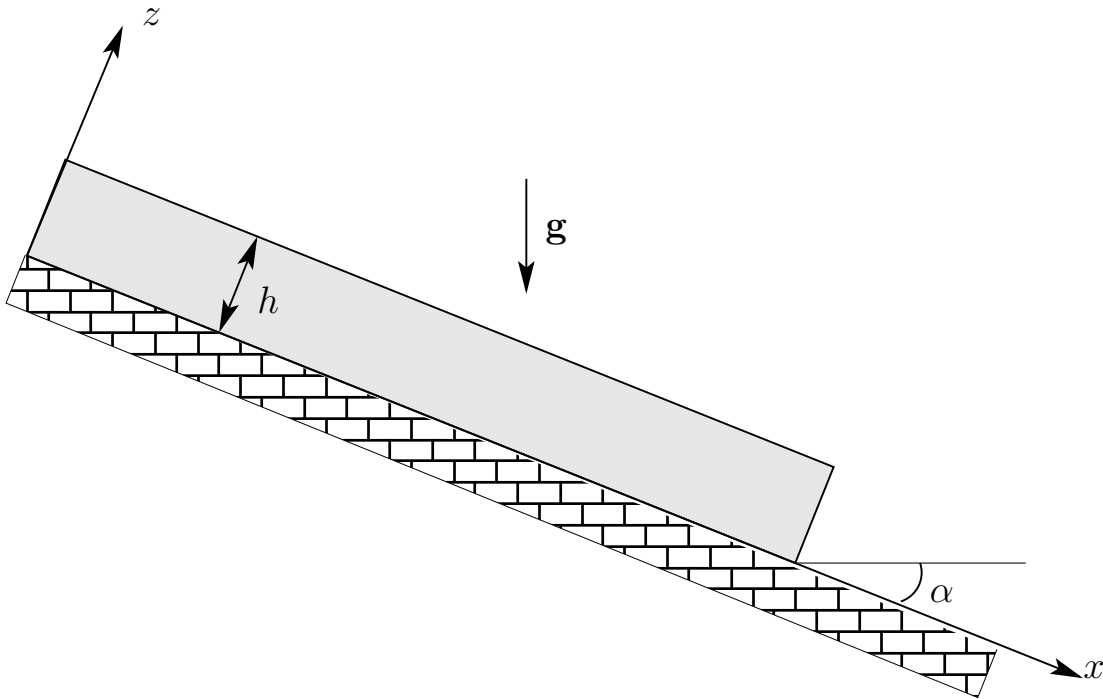


FIGURE 13 – Ruissellement laminaire.

Exercice 5.6 : Amortisseur hydraulique

Un amortisseur est constitué par un piston baignant dans un cylindre de rayon R rempli d'huile, fermé dans sa partie basse, ouvert dans sa partie haute. L'espace entre le piston et le cylindre est a .

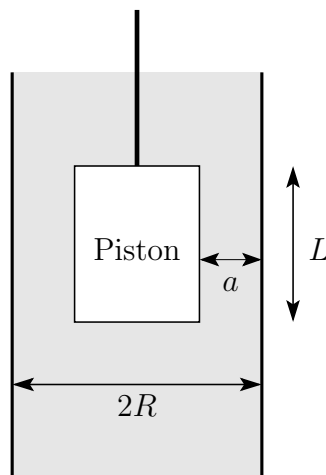


FIGURE 14 – Amortisseur à piston.

1. On fait descendre le piston à vitesse constante W_0 . Que se passe-t-il ? On cherchera intuitivement dans quelles régions la vitesse de l'écoulement est notable,

- et on donnera les variations approximatives des champs de pression et de vitesse dans l'espace. Quel type d'écoulement peut on attendre dans l'interstice ?
2. Ecrire l'expression du débit volumique de fluide engendré par le mouvement descendant du piston. Quel est le débit dans l'interstice ?
 3. En utilisant les résultats de l'exercice 5.3, en déduire la surpression dans la partie basse (on utilisera les grandeurs adimensionnelles de l'exercice 5.3). Tracer cette surpression en fonction de $\alpha = R_i/R_e$. Comment varie-t-elle quand α est proche de 1. Qu'en concluez vous ?

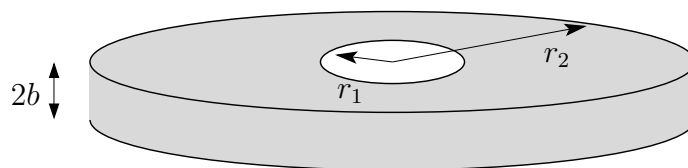
Exercice 5.7 : Ecoulement de Couette instationnaire

On reprend le problème de l'écoulement de Couette, mais on s'intéresse aux premiers instants du mouvement, pendant lesquels le champ de vitesse s'établit progressivement. A l'instant $t = 0$, la plaque initialement immobile est mise en mouvement à la vitesse U_0 .

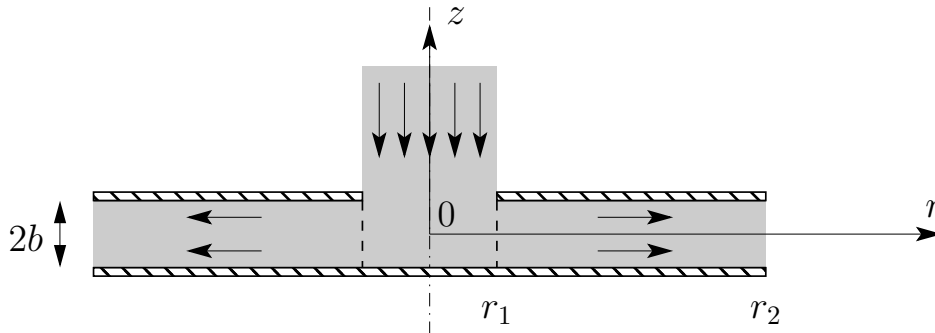
1. Ecrire les équations de Navier-Stokes sous forme instationnaire, en reprenant les hypothèses de l'exercice 5.1. A quelle équation connue se ramènent les équations ? Quel est le seul paramètre physique intervenant dans l'équation ? Quelle est sa dimension ?
2. Ecrire les conditions aux frontières et la condition initiale. Le problème d'EDP obtenu vous rappelle-t-il un (ou plusieurs) problème similaire dans un autre domaine physique ?
3. Résoudre le problème et tracer le champ de vitesses au cours du temps.

Exercice 5.8 : Ecoulement radial entre deux disques (d'après DS IFI 2014)

Soient deux disques de rayon r_2 séparés par un espace $2b$. On injecte un fluide à une pression $p_{\text{atm}} + \Delta p$ par un trou de rayon r_1 percé dans le disque supérieur.



Le fluide s'écoule entre les deux disques et débouche à l'atmosphère en $r = r_2$.



On fait l'hypothèse que l'écoulement est purement radial entre r_1 et r_2 , poussé par une pression $p_{\text{atm}} + \Delta p$ en $r = r_1$. On raisonnera donc en coordonnées cylindriques. On supposera une symétrie de révolution.

1. Ecrire l'équation de conservation de la masse, et montrer que la vitesse radiale s'écrit $v_r(r, z) = \phi(z)/r$, où $\phi(z)$ est une fonction de z seulement.
2. Ecrire l'équation de quantité de mouvement projetée sur les trois axes, en régime stationnaire (ne pas exprimer encore v_r en fonction de ϕ , cf. question suivante). On négligera la pesanteur. En déduire que la pression ne dépend que de r .
3. Ré-écrire l'équation de QDM projetée sur r en utilisant la relation $v_r(r, z) = \phi(z)/r$.
4. Afin de pouvoir calculer le profil de vitesses, on doit négliger le terme proportionnel à ρ dans l'équation précédente. Quelle condition sur quel nombre adimensionnel doit-on écrire pour ce faire ? Comment s'appelle ce type d'écoulement ?
5. Avec l'approximation précédente, montrez que l'équation se sépare en deux équations différentielles indépendantes sur r et sur z , respectivement, avec une constante de séparation K .

En résolvant l'équation sur r , déterminez la constante K en fonction de Δp , r_1 et r_2 (attention au signe).

6. Ecrire les conditions aux limites que doit vérifier le champ de vitesse. En intégrant l'EDO sur z , en déduire $\phi(z)$ puis le champ de vitesses $v_r(r, z)$.

Tracez le champ de vitesses sur la feuille de réponse en annexe.

7. Ré-écrivez la fonction $\phi(z)$ et le champ de vitesses plus simplement en fonction

$$\text{de } U_0 = \frac{\Delta p b^2}{2\eta r_2 \ln(r_2/r_1)}.$$

Que représente cette grandeur ?

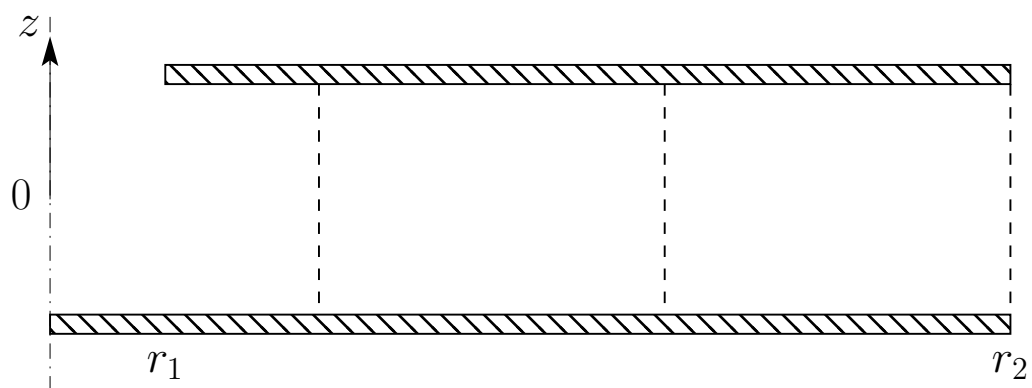
8. Calculez le débit volumique injecté en fonction de U_0 , puis de Δp .
9. On revient sur l'approximation faite à la question 4. Grâce à vos résultats précédents, estimez les termes visqueux et inertiel en un point de coordonnées $(r, 0)$, et formez le rapport inertiel/visqueux. On exprimera les résultats en fonction de U_0 , r_2 , r , et des propriétés physiques du fluide.

En déduire une condition pour que le terme inertiel soit négligeable en tout point de l'écoulement entre les disques. On fera apparaître un nombre de Reynolds.

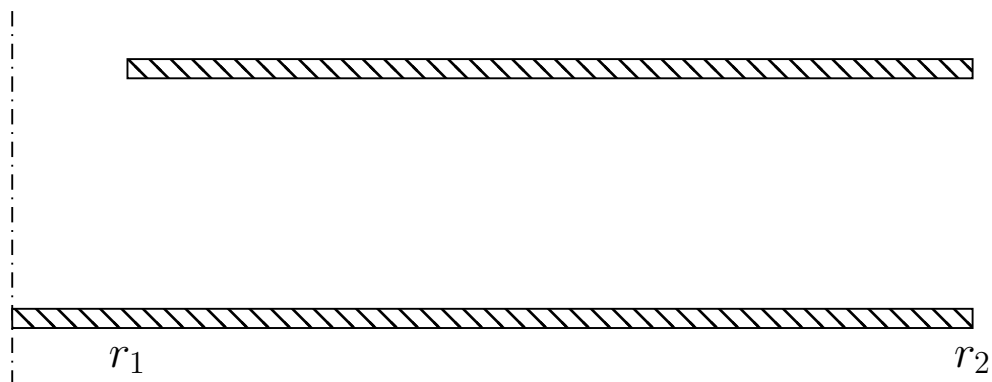
En déduire une condition pour que le terme inertiel soit négligeable en tout point de l'écoulement entre les disques. On fera apparaître un nombre de Reynolds.

10. Sur la feuille de réponse en annexe, dessinez approximativement les lignes de courant lorsque cette condition est vérifiée, et lorsqu'elle ne l'est plus.

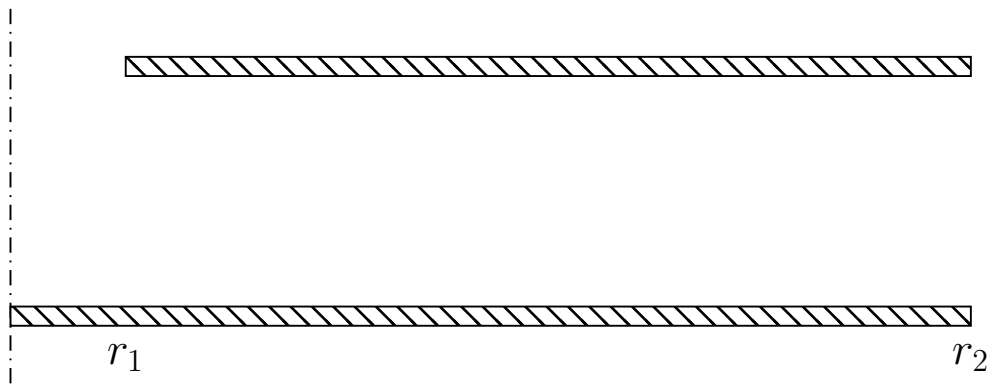
Tracez ci-dessous, au niveau des lignes pointillées, le profil des vitesses que vous avez obtenu par calcul.



Tracez ci-dessous les lignes de courant quand le terme inertiel est négligeable



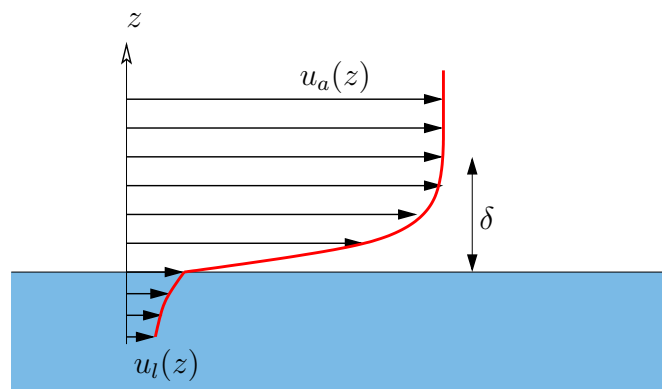
Tracez ci-dessous les lignes de courant quand le terme inertiel n'est plus négligeable



Exercice 5.9 : Courants d'eau engendrés par du vent.

Un plan d'eau occupe l'espace vertical $0 < z < h$. A l'instant $t = 0$, loin au-dessus de l'eau, le vent se met à souffler avec une vitesse constante U_∞ . L'eau est initialement au repos et on cherche comment évolue son champ de vitesses au cours du temps à cause du cisaillement par le vent. On notera η_a le champ de vitesses dans l'air, et η_l la viscosité de l'eau.

1. Quelles équations faudrait-il écrire pour résoudre rigoureusement le problème ? Pourquoi ne peut-on pas imposer la vitesse du vent à la surface ? Que peut-on écrire sur cette dernière ? Le résultat trouvé justifie-t-il la forme des champs de vitesses à l'interface, proposée dans la figure suivante ? Que peut-on en conclure sur δ , hauteur sur laquelle la vitesse de l'air atteint sa valeur limite ?



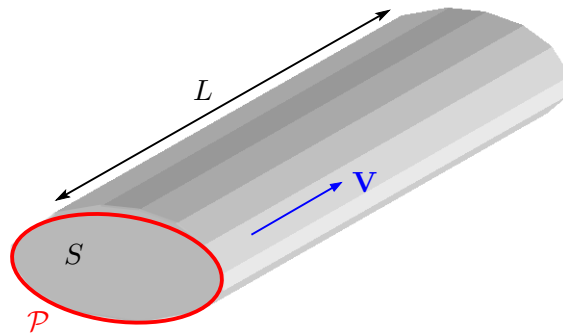
2. Ecrire les équations de Navier-Stokes dans l'eau. En supposant le mouvement unidirectionnel, à quelle EDP connue se ramènent les équations ?
3. Ecrire la condition frontière sur le fond.
4. On cherche une approximation permettant de ne pas résoudre le problème de l'écoulement de l'air. Quelle condition aux limites peut-on imaginer à la surface pour le mouvement de l'eau (on réfléchira en terme de force tangentielle...)? On notera

$$K = \frac{\eta_a h}{\eta_l \delta}$$

5. Ecrire la condition initiale.
6. A quel problème connu le système d'équations obtenu s'apparente-t-il ? Quelle(s) méthode(s) connaissez-vous pour résoudre ce problème ?
7. Cherchez la solution stationnaire. Quelle est la valeur de la vitesse finale de l'eau en surface ? En combien de temps approximativement le régime stationnaire est-il atteint ?

Exercice 5.10 : Ecoulement laminaire dans un tube de section quelconque (DS IFI 2013)

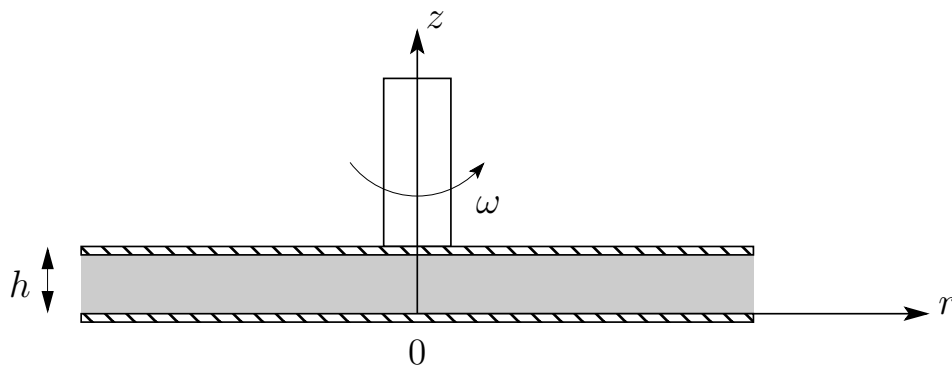
Un fluide s'écoule dans tube de la figure ci-dessous. On suppose que l'écoulement est laminaire, orienté dans la direction z du tube, et provoqué par une surpression Δp à l'entrée. On note w l'unique composante non nulle du champ de vitesse. On suppose la pesanteur orientée dans le sens de l'axe x .



1. En utilisant l'équation de conservation de la masse, montrer que w ne dépend que de x et y .
2. Ecrire les équations de Navier-Stokes pour cet écoulement, et déduire des projections sur x et y que la pression s'écrit sous la forme $p(x, y, z) = \rho g x + K(z)$, où $K(z)$ est une fonction indéterminée.
3. En utilisant ce dernier résultat dans la projection sur z , montrer que la fonction $K'(z)$ est forcément une constante. Une argumentation concise mais claire est demandée.
4. Que vaut cette constante $K'(z)$?
5. En déduire que la détermination du champ de vitesses revient à la résolution d'une équation de Poisson sur w dans le plan (x, y) , dont on écrira le second membre en fonction de Δp .
6. Ecrire les conditions aux frontières applicables sur la paroi S du tube, et indiquez leur type (au sens des EDP).
7. En constatant que le problème est régi par les mêmes équations que la déformation d'une membrane soumise à son propre poids, tracez approximativement le profil des vitesses dans la section du tube.

Exercice 5.11 : Viscosimètre plan-plan (DS IFI 2015)

Un viscosimètre est constitué par deux disques distants d'une épaisseur h . Le disque supérieur est mobile autour de son axe, l'autre est fixe. Le liquide d'étude est cisailé entre les deux disques.



On fait l'hypothèse que l'écoulement est purement orthoradial entre les disques. On raisonnera en coordonnées cylindriques. On prendra l'origine au centre du disque inférieur.

1. Ecrire l'équation de conservation de la masse, et montrer que la vitesse orthoradiale v_θ ne dépend que de r et de z .
2. Ecrire l'équation de quantité de mouvement projetée sur les trois axes, en régime stationnaire.
La simplifier en faisant l'hypothèse d'un mouvement rampant.
3. Ecrire les conditions aux frontières que doit vérifier le champ de vitesses au niveau des disques (on rappelle que le disque supérieur tourne à la vitesse angulaire ω ...)
4. Montrer qu'un champ de vitesse de la forme $v_\theta(r, z) = zf(r)$ est solution des équations de Navier-Stokes écrites ci-dessus, où f est une fonction que l'on spécifiera. Déterminer l'expression finale du champ de vitesse grâce aux conditions frontière.
Comment a-t-on intuité ce champ de vitesses ? (on pourra se référer à un autre écoulement connu)
5. Exprimez le tenseur des vitesses de déformation $\overline{\overline{D}}$ en utilisant ce champ de vitesses.
6. Exprimez le couple exercé par le disque mobile sur le fluide. On notera R le rayon des disques.
Exprimez la viscosité du fluide en fonction de ce couple.
7. A l'examen du tenseur $\overline{\overline{D}}$, la vitesse de déformation est-elle uniforme dans l'écoulement ?
Sachant que certains fluides ont une viscosité dépendante de la vitesse de déformation, ce viscosimètre permet-il de mesurer correctement cette dépendance ?
Quelle autre configuration pourrait-on envisager pour y remédier ?

Exercice 5.12 : Filage textile à l'eau (DS IFI 2016)

L'étape cruciale dans la fabrication d'un fil textile par le procédé de filage à eau est celle pendant laquelle le polymère est étiré fortement ; les fils de polymères sont étirés sur une très courte distance dans l'air (quelques centimètres), puis refroidis brusquement dans un bac d'eau (Fig. 15).

On cherche à déterminer l'évolution de la vitesse et de la section du fil entre la filière et le bac d'eau. La section du fil varie de S_0 à S_E sur une longueur L (qui correspond à la distance entre la filière et le bac d'eau). On note $R(z)$ le rayon du fil en z et $S(z)$ sa section. On fait les hypothèses suivantes :

- l'écoulement est axisymétrique et la vitesse axiale du fil v_z ne dépend que de z . Le champ des vitesses s'écrit donc :

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_r(r, z) \\ 0 \\ v_z(z) \end{bmatrix},$$

et $v_z(z)$ varie de v_0 , vitesse d'extrusion, à v_E , vitesse d'enroulement,

- l'écoulement est stationnaire,
- le fluide est incompressible et supposé (à tort) newtonien.

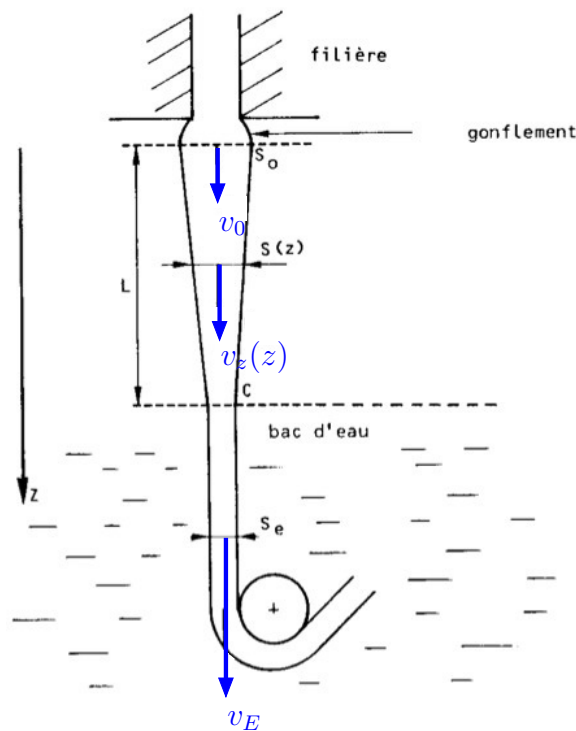


FIGURE 15 – Schéma de la filière

1. Questions physiques (on pourra revenir à cette question ultérieurement), réponses courtes mais efficaces demandées.
 - (a) Que vaut la vitesse radiale au centre ?
 - (b) Pourquoi peut-on considérer que v_z ne varie pas selon r ?

2. Ecrire l'équation de conservation de la masse sous forme locale, et montrer par intégration que la vitesse radiale s'écrit :

$$v_r(r, z) = -\frac{r}{2} \frac{dv_z}{dz}$$

3. Calculez le tenseur des déformations, le tenseur des contraintes visqueuses, et le tenseur des contraintes total en tout point du fil. On utilisera le résultat de la question 2 pour exprimer tous les termes en fonction des dérivées de $v_z(z)$.
4. Calculer le vecteur contrainte à la surface libre du fil (en $r = R(z)$). On supposera pour simplifier que la normale sortante à cette surface est assimilable au vecteur unitaire radial \mathbf{e}_r .
5. Ecrivez que ce vecteur contrainte est égale à la contrainte exercée par la pression atmosphérique, et écrivez les deux équations résultantes. Déduisez-en que la vitesse v_z varie linéairement en z et calculez-la en utilisant les conditions aux limites. On posera $D = v_E/v_0$ taux d'étirage.
6. Ecrire les équations de Navier-Stokes en négligeant la pesanteur, et, en faisant l'hypothèse d'un écoulement rampant, en déduire que la pression ne dépend ni de r ni de z .

En utilisant la question précédente, en déduire que la pression vaut en tout point du fil :

$$p = p_{\text{atm}} - \eta(D - 1) \frac{v_0}{L}$$

7. En déduire la contrainte axiale totale σ_{zz} , et calculez la force F_0 (dite d'étirage) exercée sur la section S_0 . On exprimera le résultat en fonction du débit volumique Q .

6 Couches limites

Exercice 6.1 : Epaisseurs de couche limite. Transition laminaire-turbulent

On suppose que la transition laminaire-turbulent sur une plaque plane s'opère pour un Reynolds de 5×10^5 .

1. On considère un écoulement d'air à température ambiante, à 20 km h^{-1} sur une plaque plane. A quelle distance du bord d'attaque la couche limite devient-elle turbulente ? Quelle est alors l'épaisseur δ de la couche limite laminaire ?
2. On prend une plaque plane de 3 m. Quelle est le type et l'épaisseur de la couche limite au bord de fuite ?
3. Reprendre les questions 1 et 2 pour une vitesse de 100 km h^{-1} . Tracez (calculatrice, MATLAB, à la main...) l'enchaînement des deux couches limites dans les deux cas.
4. On suppose que le haut de la vitre arrière d'une voiture est à une abscisse curviligne de 3.5 m à partir de l'avant de la voiture. Quelle est l'épaisseur et le type de couche limite au niveau de cette vitre arrière à 20 km h^{-1} ? à 50 km h^{-1} ? à 130 km h^{-1} ? Si la voiture est mal profilée (type break) que se passe-t-il en aval ?
5. Question de réflexion : vous roulez en voiture la fenêtre ouverte. Pourquoi entendez-vous un souffle pour des vitesses élevées ? Pouvez-vous calculer approximativement une valeur théorique de la vitesse limite à partir de laquelle on entendrait ce souffle ? Le résultat est-il plausible ?

Exercice 6.2 : Longueur d'établissement dans un tube

Montrer que la longueur d'établissement L_e dans un tube de diamètre D varie en $L_e/D \sim \text{Re}$ en laminaire et $L_e/D \sim \text{Re}^{1/6}$ en turbulent. On rappelle les expressions des épaisseurs de couches limite :

$$\frac{\delta}{L} = \frac{5}{\text{Re}^{1/2}} \quad \text{en laminaire} \quad \frac{\delta}{L} = \frac{0.16}{\text{Re}^{1/7}} \quad \text{en turbulent}$$

Exercice 6.3 : Déviation des lignes de courant

Traiter les deux premières questions de l'exercice 6.7.

Exercice 6.4 : Soufflerie

On considère une soufflerie de section carrée $1 \text{ m} \times 1 \text{ m}$ et de 6 m de long, avec de l'air à 20°C à la vitesse $U = 30 \text{ m s}^{-1}$. La zone d'essais est placée dans l'intervalle

[2m, 4m] à partir de l'entrée. De quel angle doit on incliner les parois de la veine afin de compenser les déviations des lignes de courant, et d'avoir une zone d'essais où la vitesse est quasiment droite ?

On supposera que la transition laminaire-turbulent intervient pour $Re = 10^6$. On utilisera le résultat de l'exercice 6.3 et le résultat en turbulent (cf. exercice 6.8) :

$$\frac{\delta}{x} = \frac{0.16}{Re_x^{1/7}} \quad \delta^* = \frac{\delta}{8}$$

Exercice 6.5 : Reynolds de transition laminaire-turbulent

Exercice de réflexion : la transition laminaire-turbulent dans un tube intervient pour $Re = 2300$ alors que pour la plaque plane, la valeur du Reynolds de transition est bien plus élevée (entre $5 \cdot 10^5$ et $3 \cdot 10^6$).

Cet différence d'ordre de grandeur ne vous étonne-t-elle pas ? Comment réconcilier ces deux résultats ?

Exercice 6.6 : Théorie de Blasius pour la plaque plane

On considère le problème de la plaque plane dans le régime laminaire.

1. Rappeler les équations de Navier-Stokes en 2D.
2. Montrer à partir de la conservation de la masse que $\frac{v}{U} = O\left(\frac{\delta}{x}\right)$.
3. Évaluez les ordres de grandeur des différents termes des équations de Navier-Stokes et simplifiez les équations sachant que $\delta/x \simeq Re^{-1/2}$ (on admettra ce dernier résultat, qui est facile à retrouver par un raisonnement physique).
4. On cherche une solution auto-similaire des équations obtenues, sous la forme $u(x, y) = UF(\theta)$ où $\theta = y\sqrt{U/\nu x}$. Reportez cette expression dans la conservation de la masse, et montrez que $v(x, y)$ s'exprime sous la forme :

$$v(x, y) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu U}{x}} G(\theta)$$

où $G(\theta)$ s'exprime en fonction de $F(\theta)$ et d'une primitive de $F(\theta)$. Trouvez la constante d'intégration à l'aide de la condition d'adhérence à la plaque.

5. Reportez les expressions de u et v dans la première équation de Navier-Stokes et montrez que F vérifie une équation intégro-différentielle. C'est l'équation de Blasius.
6. Complétez l'équation obtenue par deux conditions sur $F(0)$ et $F(+\infty)$.
7. Transformez l'équation de Blasius en équation différentielle du troisième ordre.

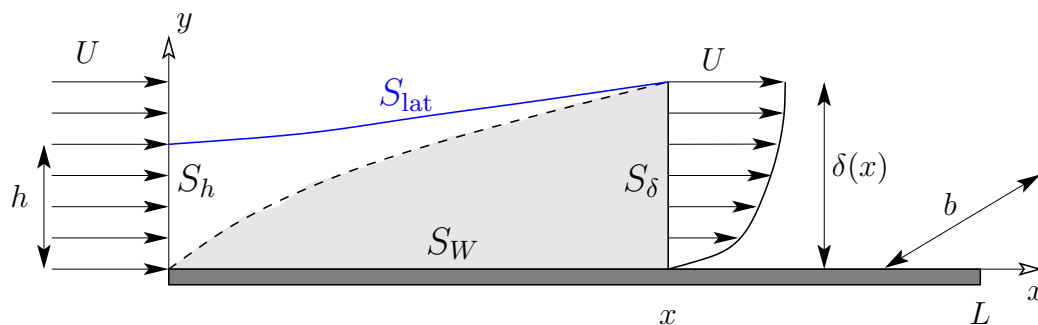
Exercice 6.7 : Grandeurs intégrales dans la couche limite laminaire

Von-Karman a montré que l'application des équations de conservation sous forme globale à la couche limite permet d'obtenir des ordres de grandeur très réalistes des lois d'échelle dans les couches limites.

Pour cela, on remonte une ligne de courant partant du bord de la couche limite à une abscisse x donnée, jusqu'à l'aplomb du bord d'attaque, et on note h l'ordonnée du point d'intersection avec l'axe des y . On notera b la largeur de la plaque et les notations pour les différentes surfaces sont indiquées sur la figure.

L'idée générale est d'écrire les équations de conservation sous forme intégrale (masse et quantité de mouvement) sur le volume délimité par la surface fermée $S_h + S_{\text{lat}} + S_\delta + S_W$, et, en supposant un profil de vitesse approximatif, d'en déduire toutes les propriétés de la couche limite.

La méthode fonctionne également en régime turbulent.



1. Justifier la forme de la ligne de courant tracée. Qu'en concluez-vous sur le champ de vitesses ?
2. Ecrire l'équation de conservation de la masse sur le volume délimité par $S_h + S_{\text{lat}} + S_\delta + S_W$, et en déduire h , et $\delta^* = \delta - h$.
3. Ecrire l'équation de conservation de la quantité de mouvement sur le même volume en négligeant l'effet de la pesanteur, puis projetez-la sur \mathbf{e}_x . On justifiera que les forces de pression disparaissent, et que les forces visqueuses sur S_h , S_δ et S_{lat} sont nulles ou négligeables en projection sur \mathbf{e}_x .
4. En déduire que la force exercée par l'écoulement sur une portion de plaque de longueur x peut s'écrire :

$$F_D(x) = \rho b U^2 \theta(x) \quad \text{où} \quad \theta(x) = \int_0^{\delta(x)} \frac{u(y)}{U} \left[1 - \frac{u(y)}{U} \right] dy \quad (7)$$

Quelle est la dimension de θ ? Que représente-t-il physiquement? Ecrire le coefficient de traînée total C_D sur une plaque de longueur L en fonction de θ .

5. On rappelle maintenant que la force de trainée s'écrit aussi en fonction de la contrainte de cisaillement locale $\tau_W(x)$ par :

$$F_D(x) = \int_0^x \tau_W(x) b \, dx$$

En dérivant cette expression et en utilisant la question précédente, exprimez la contrainte locale $\tau_W(x)$ en fonction de $\theta(x)$.

En déduire aussi le coefficient de frottement local :

$$c_W(x) = \frac{\tau_W(x)}{1/2\rho U^2}$$

en fonction de $\theta(x)$.

6. La connaissance du profil de vitesses va permettre l'évaluation de $\theta(x)$ ainsi que toutes les grandeurs ci-dessus.

Dans cette optique, on approxime le profil de vitesse dans la couche limite laminaire par un profil parabolique en supposant que le profil a une tangente verticale en $y = \delta$. Ecrire l'expression correspondante de $u(y)$ (on aura intérêt à le calculer sous forme adimensionnelle $u/U = f(y/\delta)$)

7. En déduire l'expression approximative de $\theta(x)$.
8. En calculant la contrainte locale τ_W par sa définition, et en utilisant sa valeur trouvée dans les questions 5 et 7, en déduire une équation différentielle vérifiée par $\delta(x)$.

Résolvez-la pour trouver une expression de δ/x en fonction du nombre de Reynolds, puis de θ/x , c_W , C_D et δ^*/x .

Les résultats sont-ils très différents des expressions exactes ?

On donne les expressions exactes pour la couche limite laminaire, obtenues par la théorie de Blasius :

$$\frac{\delta}{x} = \frac{5.0}{\text{Re}_x^{1/2}} \quad c_W = \frac{\theta}{x} = \frac{0.664}{\text{Re}_x^{1/2}} \quad C_D = \frac{1.328}{\text{Re}_L^{1/2}} \quad \frac{\delta^*}{x} = \frac{1.721}{\text{Re}_x^{1/2}}$$

On donne par ailleurs :

$$\int_0^1 u(2-u)(1-u(2-u)) \, du = \frac{2}{15}$$

Exercice 6.8 : Grandeurs intégrales dans la couche limite turbulente

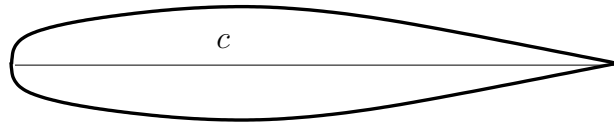
Blasius a proposé une approximation du profil de vitesse dans la couche limite turbulente :

$$\frac{u(y)}{U} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7}$$

En reprenant la méthode précédente, calculez δ/x en fonction du nombre de Reynolds, puis θ/x , c_W et δ^*/x dans la couche turbulente.

Exercice 6.9 : Trainée sur une aile d'avion

Un profil d'aile d'avion symétrique est caractérisée par sa corde c , distance entre le bord d'attaque et le bord de fuite, et sa largeur b .



La surface de référence dans la définition du coefficient de trainée est $S = bc$. Des mesures en soufflerie ont permis d'exprimer ce coefficient de trainée en fonction de l'angle d'incidence α en degrés, et du Nombre de Reynolds Re_c basé sur c par :

$$1000 \times C_D = \left[A \left(\frac{Re_c}{10^7} \right)^3 + B \right] \left(\frac{\alpha}{10} \right)^3 + C \left(\frac{Re_c}{10^7} \right) + D$$

avec $A = -0.95$, $B = 4.7$, $C = -3.3$, $D = 8.1$.

Imaginons un avion léger équipé de ces ailes ($b = 7$ m, $c = 1.5$ m). Calculez C_D , la force de trainée sur les ailes, et la puissance minimale de vol correspondante :

1. en vol de croisière $\alpha = 4^\circ$, $V = 180$ km h⁻¹
2. en descente atterrissage $\alpha = 10^\circ$, $V = 70$ km h⁻¹

Donnez également un ordre de grandeur de l'épaisseur de la couche limite au bord de fuite.

On prendra $\rho = 1.15$ kg m⁻³ et $\mu = 18 \times 10^{-6}$ Pa s.

Exercice 6.10 : Trainée sur un coureur

La trainée sur un homme en position verticale face à un écoulement horizontal est donnée par (pour $Re > 10^4$) :

$$C_D S = 0.8 \text{ m}^2$$

1. Calculez la force de trainée exercée sur un coureur courant à 10 km h⁻¹, la puissance de cette force, et la consommation de sucre associée pendant une heure :
 - en l'absence de vent,
 - avec un vent de face de 20 km h⁻¹ (force 3-4).

Un morceau de sucre = 23 kcal

2. Pourquoi dit-on qu'il est impossible de battre un record en hiver ?

Exercice 6.12 : Trainée additionnelle par un coffre de toit (DS IFI 2013)

On considère une voiture de longueur $L = 4.70$ m, largeur $\ell = 1.80$ m, hauteur $h = 1.40$ m roulant à 90 km h^{-1} . Le coefficient de trainée est estimé à 0.3.

1. Calculez la force de trainée et la puissance dissipée par la voiture. On donnera d'abord les expressions analytiques, puis les résultats numériques.
2. On place un coffre de toit sur la voiture de dimensions $2 \text{ m} \times 0.8 \text{ m} \times 0.4 \text{ m}$ (longueur, largeur, hauteur). Le bord d'attaque du coffre de toit est à $1\text{m}50$ de l'avant de la voiture.



Quel est la valeur du nombre de Reynolds et l'épaisseur de la couche limite sur la voiture à cet endroit ?

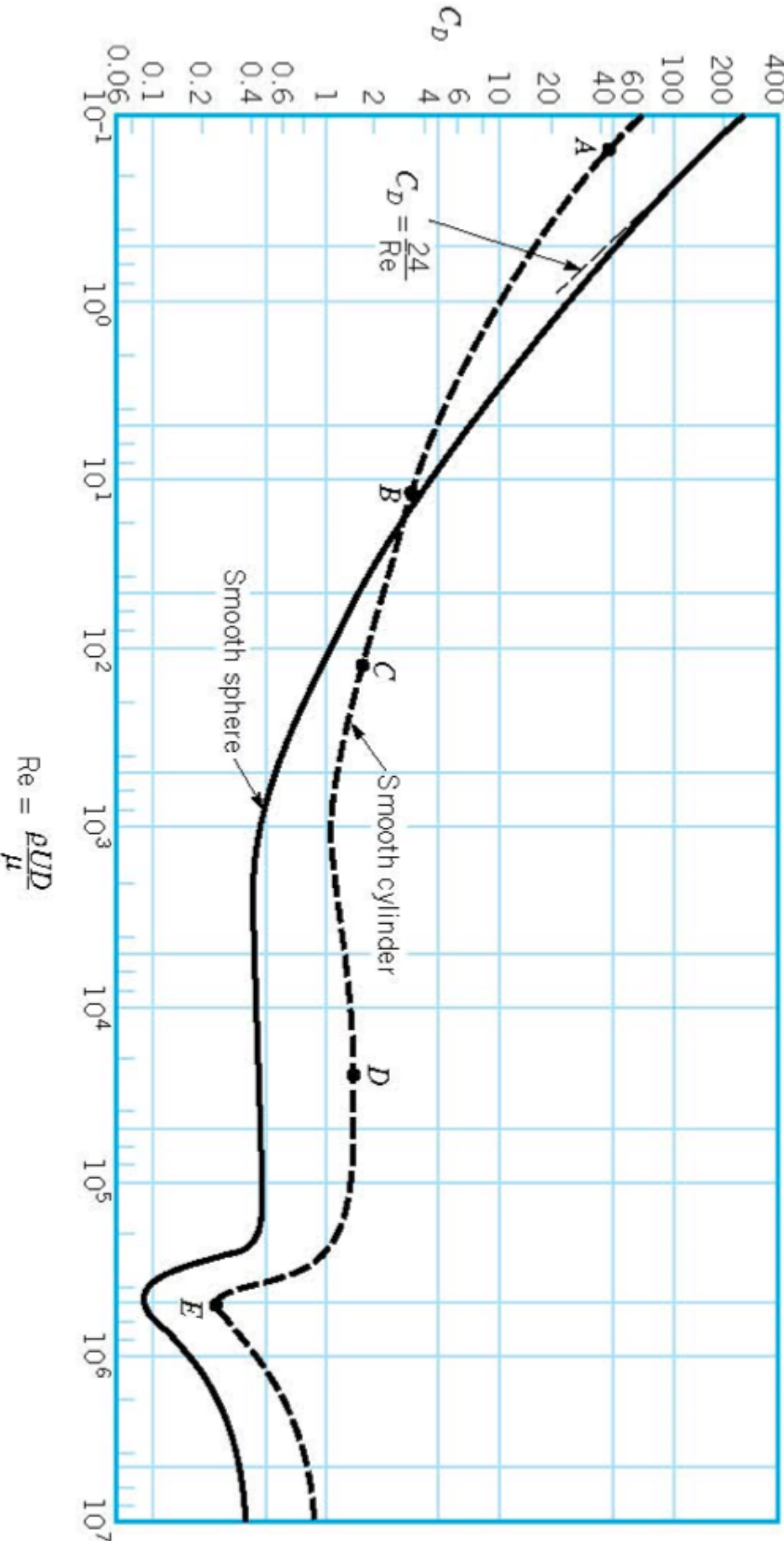
L'écoulement incident sur le coffre peut-il être raisonnablement considéré comme uniforme ?

3. On mesure en soufflerie que la force exercée sur la voiture équipée du coffre de toit vaut 480 N à 90 km h^{-1} .
Calculez le coefficient de trainée correspondant. On supposera que la surface frontale vue par l'écoulement est celle de la voiture plus celle du coffre.
Expliquez pourquoi le coefficient est plus élevé que pour la voiture seule.

On prendra les données de l'air à 20°C : $\eta = 1.8 \times 10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{s}$, $\rho = 1.2 \text{ kg/m}^3$.

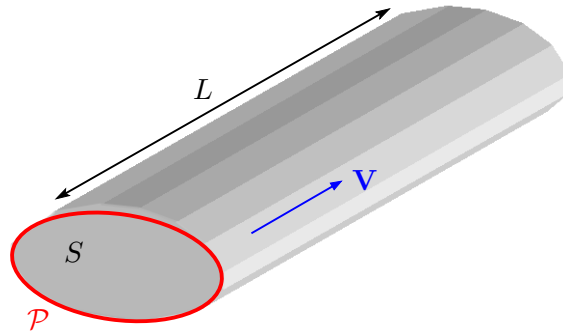
Exercice 6.13 : Vitesse terminale d'une sphère en chute libre dans l'air (oral rattrapage IFI 2016)

1. Rappelez l'expression générale de la force de trainée et appliquez-la à une sphère de diamètre D . On notera C_D le coefficient de trainée.
2. Ecrivez une équation implicite permettant de trouver la vitesse terminale de chute d'une sphère de diamètre D et de masse volumique ρ_s dans un fluide donné.
3. Transformez l'équation obtenue en une équation implicite sur le Reynolds. On vérifiera l'homogénéité de l'expression obtenue.
4. A l'aide de l'abaque ci-après, déterminez graphiquement le Reynolds, puis la vitesse terminale, de sphères de densité 950 kg/m^3 et de diamètres 1 mm , 1 cm , puis 10 cm , dans de l'air à 20°C .



Exercice 6.14 : Perte de charge additionnelle liée à des inclusions. Echangeurs. (problème de synthèse)

On considère une canalisation horizontale de longueur L , dont la section S est de forme quelconque mais constante. On note \mathcal{P} le périmètre du tube.



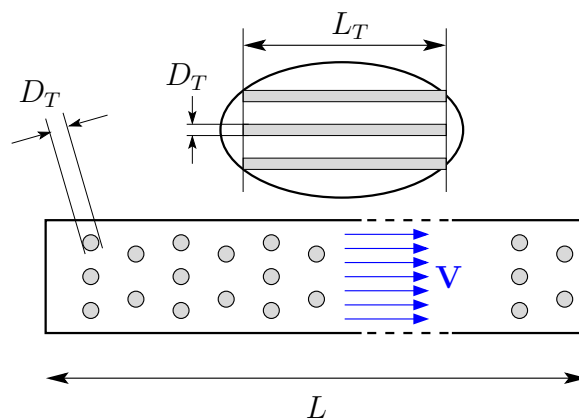
1. On note Δp_0 la perte de charge régulière (exprimée en pression) sur une telle canalisation.

Rappeler son expression générale en fonction de f_0 coefficient de perte de charge, V vitesse moyenne du fluide, L longueur et D_H diamètre hydraulique, dont on rappellera l'expression (cf. poly p. 85).

2. Donnez l'expression du diamètre hydraulique D_H dans le cas où la section de la canalisation est :
 - un carré d'arête a .
 - un triangle équilatéral d'arête a
3. En utilisant le théorème d'Euler entre l'entrée et la sortie, montrer que Δp_0 peut être relié à la contrainte τ exercée par le fluide sur les parois par :

$$\tau \mathcal{P} L = \Delta p_0 S$$

Pour refroidir le fluide circulant dans cette canalisation, l'intérieur de cette dernière est traversée par un réseau de petits tubes cylindriques de diamètre D_T et de longueur L_T .



On suppose que l'écoulement est turbulent, et que la vitesse est à peu près uniforme dans la canalisation, de telle sorte que chaque tube voit la même vitesse incidente V .

4. Rappeler l'expression de la force de trainée exercée sur un petit tube. On notera C_D le coefficient de trainée et on ne cherchera pas à lui donner une valeur ici.
5. On note N le nombre de tubes présents sur la longueur L . En utilisant le théorème d'Euler, montrez que la perte de charge Δp dans cette configuration s'écrit :

$$\Delta p = \Delta p_0 + N\Delta p_T$$

où Δp_0 est la perte de charge en l'absence de tubes (question 1), et Δp_T une perte de charge additionnelle que l'on exprimera en fonction de V , C_D , L_T , D_T , S , et L

6. En notant $n = N/L$ la densité linéique de tubes (en m^{-1}), montrez que le coefficient de pertes de charge régulière f dans cette configuration s'écrit :

$$f = f_0 + n \frac{4L_T D_T}{\mathcal{P}} C_D$$

où f_0 est le coefficient de pertes de charge en l'absence de tubes.

7. On prend une canalisation de section carrée d'arête $a = 20$ cm, de rugosité $50 \mu\text{m}$ dans laquelle de l'air à 20°C circule à 20 m/s.

Calculez le nombre de Reynolds et le coefficient de pertes de charge f_0 . On pourra utiliser la formule de Haaland.

8. On équipe la canalisation avec 16 tubes par mètre, de longueur $L_T = a$ et de diamètre $D_T = 1$ cm. On prendra $C_D = 1.2$. Calculer le coefficient de pertes de charge additionnel occasionné par la présence des tubes.

Pour assurer la même vitesse d'écoulement qu'en l'absence de tubes, par quel facteur doit on multiplier la puissance du ventilateur ? Commentez le résultat.

Exercice 6.15 : Trainée sur une potence d'éclairage (Rattrapage IFI 2018)

Une potence d'éclairage de stade est constituée d'un mât qu'on supposera cylindrique de diamètre D et de hauteur H , et de N projecteurs organisés en matrice rectangulaire de hauteur $2a$ (Fig. 16) .

On cherche à calculer la force exercée par le vent sur cette structure, dans des conditions de vent extrêmes. On supposera pour simplifier que la force peut être décomposée comme la somme de :

- la force exercée sur le mât cylindrique
- N fois la somme exercée sur chaque projecteur

On considérera de l'air à 20°C .

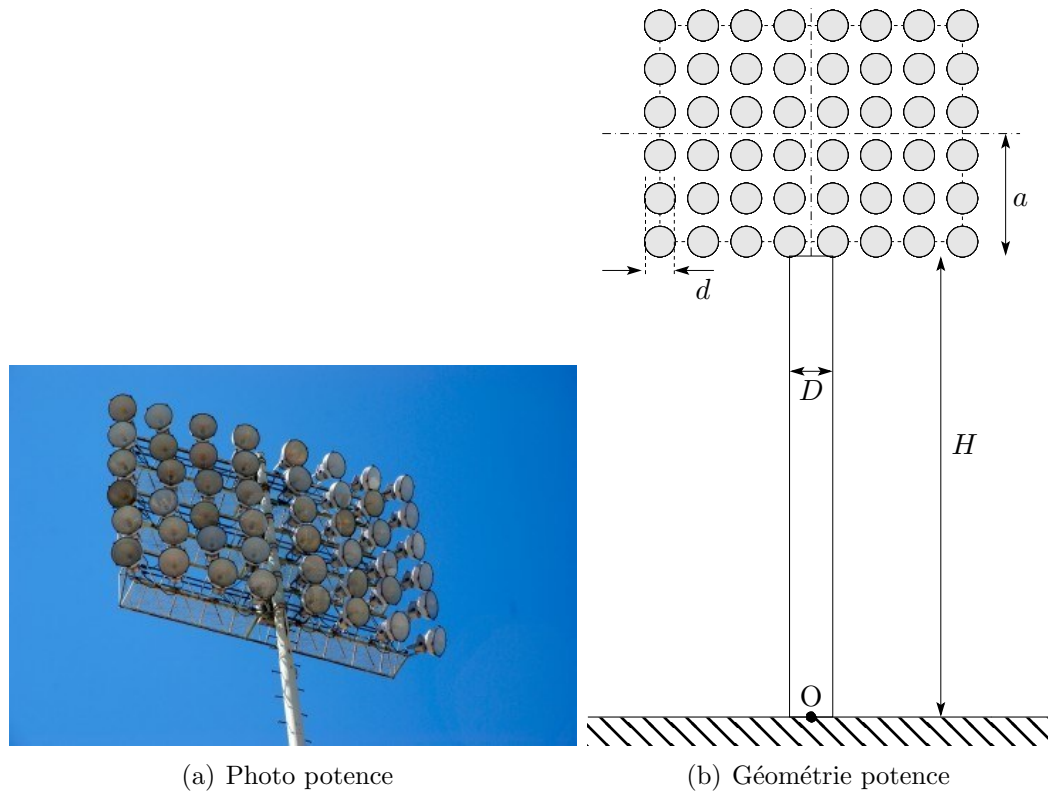


FIGURE 16 – Potence d'éclairage de stade

La vitesse du vent V sera supposée uniforme sur toute la hauteur de la potence, et sa valeur extrême dans la région considérée est estimée à $V = 25$ m/s (environ force 10 sur l'échelle de Beaufort).

Les dimensions du mât sont $H = 25$ m et $D = 80$ cm. La 1/2 hauteur de la matrice de spots vaut $a = 4$ m.

1. Quelle surface doit-on prendre en compte pour le calcul de la trainée exercée sur le mât ? Exprimez-la en fonction des données.
2. Rappelez l'expression générale de la force de trainée et exprimez $F_{D,\text{mât}}$, celle exercée sur le mât. On notera C_D le coefficient de trainée.
3. Définir (notamment la dimension caractéristique utilisée) puis calculez numériquement le nombre de Reynolds de l'écoulement autour du mât et vérifiez que l'écoulement est turbulent ($\text{Re} > 10^5$).
4. On donne le tableau suivant pour le coefficient de trainée $C_D(\text{Re})$ sur un cylindre dans le cas d'un écoulement turbulent.

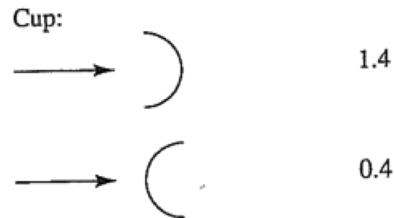
Re	1.10^6	2.10^6	4.10^6	6.10^6	8.10^6	1.10^7
C_D	0.45	0.6	0.8	0.87	0.89	0.9

Calculez numériquement :

- le coefficient de trainée autour du mât,

— la force de trainée $F_{D,\text{mat}}$ sur le mât.

5. Les spots sont assimilés à des “coupes” (hémisphères creux) de $d = 60$ cm de diamètre. Le coefficient de trainée sur un tel corps pour $\text{Re} > 10^4$ est donné sur la figure ci-dessous :



- (a) Calculez le Reynolds de l'écoulement autour d'un spot, et vérifiez que les conditions d'applications sont satisfaites.
- (b) Quelle surface doit on prendre en compte pour le calcul de la trainée sur un spot ?
- (c) On suppose un arrangement en matrice de 8×6 spots. Exprimez la force de trainée totale $F_{D,\text{spots}}$ sur l'ensemble des spots, puis calculez-la numériquement pour les deux directions possibles du vent décrites sur la schéma ci-dessus.
6. Indiquez sur un schéma simple les centres de poussée respectifs M et S de la force exercée sur le mât et de celle exercée sur les spots (par symétrie, aucun calcul n'est nécessaire).
 Déduisez-en le moment de flexion total \mathcal{M}_O exercé sur la potence en O, point d'ancrage au sol,
 Calculez-le numériquement dans les pires conditions.
7. Un collègue vous fait remarquer qu'il serait utile de faire le calcul dans des conditions hivernales avec de l'air à $T_{\text{amb}} = -5^\circ\text{C}$.
- (a) Pourquoi cette remarque ?
- (b) Quelle est la variation relative de $F_{D,\text{mat}}$, $F_{D,\text{spots}}$ et \mathcal{M}_O par rapport au cas où $T_{\text{amb}} = 20^\circ\text{C}$? (les calculs sont extrêmement concis ... rappel l'air est un gaz parfait.).

Exercice 6.16 : Fluidisation d'une particule solide

Dans de nombreux procédés ou écoulement naturels, le fluide charrie des particules solides lors de son écoulement. Par exemple, dans les procédés de cristallisation ou précipitation en continu, on veut s'assurer que les particules ne sédimentent pas au fond du cristalliseur. De même les rivières ou les torrents charrient des cailloux jusqu'à une certaine taille. On dit alors que les particules sont fluidisées.

On considère des particules solides de densité ρ_S que l'on assimilera à des sphères de rayon R , noyées dans un fluide ayant un mouvement vertical ascendant. On cherche à savoir si une particule sera emportée ou non par le fluide.

1. Indiquez qualitativement comment la particule peut être emportée par le fluide.
2. Ecrivez une condition pour qu'une particule se déplace à vitesse constante ?
3. On suppose que l'écoulement du fluide autour de la particule est rampant. Déterminer l'expression vectorielle de la vitesse de la particule en fonction de celle du liquide.
4. En déduire
 - la vitesse du liquide minimale pour fluidiser une particule de rayon donné R ,
 - le rayon maximum des particules qui seront fluidisées pour une vitesse du liquide donnée v_L .
5. Application numérique : on considère des cristaux de densité 2.5 dans un cristalliseur avec de l'eau à 20 °C comme solvant, circulant à 50 cm s⁻¹. Quelle est la taille maximale des cristaux fluidisés ?
L'hypothèse d'écoulement rampant est-elle justifiée pour ces particules ?

A Coordonnées cylindriques

On notera les composantes du vecteur vitesse (v_r, v_θ, v_z)

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (8)$$

$$\mathbf{grad} s = \begin{bmatrix} \frac{\partial s}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial s}{\partial \theta} \\ \frac{\partial s}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\nabla^2 s = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial s}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 s}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} \quad (10)$$

Attention aux formules suivantes !

1. Le Laplacien d'un vecteur **n'est pas** le vecteur formé par le Laplacien des composantes du vecteur en coordonnées curvilignes.
2. La notation formelle $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ **ne fonctionne pas** en coordonnées curvilignes.

Nous donnons ci-dessous leurs vraies expressions.

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \\ v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \\ v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\nabla^2 \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \\ \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \end{bmatrix} \quad (12)$$

Tenseur des vitesses de déformation :

$$2\overline{\overline{\mathbf{D}}} = \begin{bmatrix} 2\frac{\partial v_r}{\partial r} & r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} & \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \\ r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} & 2\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r}\right) & \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} & \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} & 2\frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (13)$$