

Indices de correction exercices de mécanique des fluides.

Olivier LOUISNARD

29 mai 2015

Cette création est mise à disposition selon le Contrat Paternité-Pas d'Utilisation
Commerciale-Pas de Modification 2.0 France disponible en ligne
[http ://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.0/fr/](http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.0/fr/) ou par courrier postal à
Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California 94105,
USA.



1 Hydrostatique

2 Bernoulli. Fluide parfait

Venturi

On fait de l'hydrostatique à travers le tube en U entre les points 1 et 2 en passant à travers B1 et B2 (rappel : on peut faire de l'hydrostatique perpendiculairement à un écoulement unidirectionnel). On obtient :

$$p_1 - p_2 = (\rho_{\text{Hg}} - \rho) gh$$

puis on applique Bernoulli le long du tube entre 1 et 2, et finalement :

$$Q = \left(\frac{1}{S_2^2} - \frac{1}{S_1^2} \right)^{-1/2} \sqrt{(d_{\text{Hg}} - 1)2gh}$$

A.N : $Q = 9.83 \times 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}$

Division d'un écoulement

C'est très semblable au venturi. On applique Bernoulli entre un point 3 au centre de l'écoulement à l'aplomb de A_1 et un autre S de A_2 . Puis comme d'habitude, hydrostatique dans le tube. On obtient :

$$h = \frac{1}{2} \frac{\rho Q^2}{(\rho_M - \rho)g} \left(\frac{1}{4S_2^2} - \frac{1}{S_1^2} \right)$$

Clepsydre

C'est un problème de vidange classique, et la formule de Toricelli s'applique (on peut la retrouver avec Bernoulli entre la surface et l'orifice). Soit z_0 l'altitude de l'orifice, et z celle de la surface libre on a donc :

$$v(z_0) = \sqrt{2g(z - z_0)}$$

En utilisant d'autre part la conservation du débit, on a :

$$\frac{v(z)}{v(z_0)} = \frac{S(z_0)}{S(z)} = \left(\frac{z_0}{z} \right)^n$$

et en remarquant que la vitesse du fluide à la surface est $-dz/dt$, on a finalement :

$$\frac{dz}{dt} = -\sqrt{2gz_0} \left(\frac{z}{z_0} - 1 \right)^{1/2} \left(\frac{z_0}{z} \right)^n$$

EDO à variables séparables, dont on peut trouver la solution, mais assez compliquée. Cela dit on remarque que z_0 correspond presque au fond de la cuve donc $z_0 \ll z$ et on peut négliger le 1 dans la parenthèse. Ça s'intègre maintenant très bien et au final, le temps pour que le niveau passe de z_1 à z_2 s'écrit :

$$t_{\text{vidange}} = \frac{\tau}{(n + 1/2)} \left[\left(\frac{z_1}{z_0} \right)^{n+1/2} - \left(\frac{z_2}{z_0} \right)^{n+1/2} \right] \quad \text{où} \quad \tau = \sqrt{\frac{z_0}{2g}}$$

Pour que l'évolution du niveau soit linéaire par rapport au temps, il faut donc $n = 1/2$.

Manomètre à mercure

Correction à l'énoncé : le haut de la flèche h_e sur le dessin doit aller jusqu'à l'axe du tube.

Même principe que Venturi ou division d'un écoulement. On obtient :

$$h = \frac{1}{d_{\text{Hg}}} \left[h_e + H + \frac{v_1^2}{2g} \left(\left(\frac{D_1}{D_2} \right)^4 - 1 \right) \right]$$

3 Forces

Pommeau de douche

Exercice semblable au coude. Aucune difficulté.

Force sur un cône

1. Revenir à la conservation de la masse sous forme intégrale, car vitesse de sortie non perpendiculaire à la surface de sortie.
2. cf. cours
3. Attention au calcul de $\iint_{S_s} \rho \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS$ (pour la même raison qu'au 1. Tenir compte de la symétrie de révolution.

$$\mathbf{F} = \rho v_e^2 S_e \left(1 - \frac{D_e^2}{D^2 - D_e^2} \right) \quad \text{A.N. : } F = 10.5 \text{ N}$$

Vanne de décharge

En utilisant la conservation de la QDM avec p_{atm} dans l'intégrale de pression, et en procédant comme dans le cours, on obtient aisément :

$$\iint_{S_1+S_2} \rho \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = -\mathbf{F}_{\text{Totale/Solide}} + \iint_{S_{\text{fond}}+S_1+S_2} -(p - p_{\text{atm}}) \mathbf{n} dS + \iiint_V \rho \mathbf{g} \quad (1)$$

Il reste à exprimer toutes les intégrales sur une largeur l arbitraire dans le sens perpendiculaire au dessin, et en projection sur x . Les contributions du poids et de S_{fond} disparaissent. Le seul problème éventuel est de ne pas oublier que p varie linéairement avec la profondeur dans les intégrales de pression. On obtient par exemple :

$$\mathbf{e}_x \cdot \iint_{S_1} -(p - p_{\text{atm}}) \mathbf{n} dS = \frac{1}{2} \rho g l h_1^2$$

Au final, on obtient :

$$\frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_x}{l} = \frac{1}{2} \rho g (h_1^2 - h_2^2) + \rho (h_1 v_1^2 - h_2 v_2^2) \quad (2)$$

La question 3 est très simple (on utilise Bernoulli à la surface, ce qui donne la formule finale :

$$v_1 = \left(2gh_1 \frac{\alpha^2}{1 + \alpha} \right)^{1/2}$$

En remplaçant dans l'expression de la force on obtient enfin, après calculs :

$$F = \frac{1}{2} \rho g l h_1^2 \frac{(1 - \alpha)^3}{1 + \alpha}$$

Force sur un obstacle dans une rivière

Exercice très semblable à la vanne. Même utilisation de la conservation de la quantité de mouvement, même type d'intégrale, et projection sur \mathbf{e}_x , dans le sens de l'écoulement.

On obtient dans un premier temps :

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_x = \rho v_1^2 h_1 l - \rho v_2^2 h_2 l + \rho g \frac{h_1^2}{2} l - \rho g \frac{h_2^2}{2} l$$

Puis en utilisant la conservation du débit, on obtient finalement, en introduisant le nombre de Froude $v_1^2/g h_1$:

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_x = \frac{1}{2} \rho g h_1^2 l (1 - \alpha) \left(1 + \alpha - 2 \frac{\text{Fr}}{\alpha} \right)$$

4 Pertes et gains de charge

Citerne.

6. Hauteur nécessaire (d'après Bernoulli généralisé)

$$\left(\frac{p_{\text{atm}}}{\rho g} + \frac{v^2}{2g}\right) - \left(\frac{p_{\text{atm}}}{\rho g} + h\right) = -h_v$$

soit :

$$h = \frac{v^2}{2g} + h_v$$

avec

$$h_v = \frac{V^2 L}{2g D} f_1 + \frac{v^2 l}{2g d} f_2 + N \frac{V^2}{2g} e_{v_{\text{coude}}} + \frac{v^2}{2g} (e_{v_{\text{reduction}}} + e_{v_{\text{vanne}}})$$

7. Application numérique :

- $re = 63700$, $Re = 28294$,
- $h_v = 6.69$ m
- $h = 7.20$ m

8. Parce qu'ils sont de diamètre grand donc la vitesse y est faible.

9. Entre la surface libre et le haut du jet :

$$\left(\frac{p_{\text{atm}}}{\rho g} + h_{\text{jet}}\right) - \left(\frac{p_{\text{atm}}}{\rho g} + h\right) = -h_v$$

d'où

$$h_{\text{jet}} = h - h_v$$

Le jet monte moins haut que la surface de la citerne car entretemps on a perdu de l'énergie par frottement visqueux. En comparant avec le résultat de la question 6, on obtient

$$h_{\text{jet}} = \frac{v^2}{2g}$$

qui indique juste que l'énergie potentielle initiale de l'eau dans la citerne peut être soit transformée en énergie cinétique, soit en énergie potentielle, mais inférieure à celle initiale, à cause des pertes d'énergie.

A.N. : $h_{\text{jet}} = 0.52$ m

10. Bernoulli entre la surface libre et la sortie :

$$h_u = h_v + \frac{v^2}{2g} \quad \text{et la puissance est} \quad \dot{W}_u = \rho g Q h_u$$

On voit que

- la hauteur de charge de la pompe h_u remplace le h du bac des questions précédentes.

- l'énergie de la pompe est en partie utilisée pour fournir de l'énergie cinétique au fluide, en partie pour compenser les pertes de charge.

A. N. : $\dot{W}_u = 71 \text{ W}$

Remplissage d'un wagon-citerne

1. Bernoulli généralisé donne :

$$\frac{v_W^2}{2g} + h_W = h_u - h_v$$

2.

3.

4. On trouve 0.0321 et 0.0306 respectivement, on est quasiment dans le turbulent rugueux, et donc $f \simeq \text{constant}$.

On obtient alors $G = 0.36 \text{ m/s}^2$, c'est-à-dire une pesanteur bien réduite.

5.

$$\frac{dh_W}{dt} = \frac{S}{S_W} \sqrt{2G(h_u - h_W)}$$

6.

$$h^* = \left(1 - \frac{t^*}{2}\right)^2$$

7.

$$t_F = 2 \frac{S_W}{S} \sqrt{\frac{h_u - h_0}{2G}} \left(1 - \sqrt{\frac{h_u - h_0 - H}{h_u - h_0}}\right)$$

On trouve 19933 s, soient plus de $\simeq 5\text{h}30$ de remplissage. C'est l'ordre de grandeur. Le problème est issu d'un stage de L3.

Ecoulement forcé par de l'air sous pression.

1. $\dot{W}_u = \rho g Q \left(H + h_v + \frac{Q^2}{2gS^2} \right)$
2. $p = p_{\text{atm}} + \rho g (H + h_v) + \frac{1}{2} \rho \left(\frac{Q}{S} \right)^2$

Réseau urbain

1. Branche amont

$$H_v = \frac{V^2}{2g} \frac{L}{D} F \quad \frac{1}{\sqrt{F}} = -1.8 \log_{10} \left[\frac{6.9}{\text{Re}} + \left(\frac{\epsilon/D}{3.7} \right)^{1.11} \right] \quad \text{Re} = \frac{\rho DV}{\eta}$$

Branche domestique :

$$h_v = \frac{v^2}{2g} \left(\frac{l}{d} f + e_{v,\text{robinet}} + N e_{v,\text{coude}} \right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -1.8 \log_{10} \left[\frac{6.9}{\text{re}} + \left(\frac{\epsilon/d}{3.7} \right)^{1.11} \right] \quad \text{re} = \frac{\rho D v}{\eta}$$

2. Formule de Bernoulli généralisée entre la surface du bac et la sortie

$$h = h_v + H_v + \frac{v^2}{2g}$$

Equation implicite en Q

3. Bernoulli généralisé entre la surface libre et A :

$$p_B = p_{\text{atm}} + \rho g h_v$$

4. $v = 3.10$ m/s, $V = 0.0214$ m/s, $\text{re} = 30950$, $\text{Re} = 2580$, $f = 0.0330$, $F = 0.0469$

Les trois termes intervenant dans Bernoulli valent alors respectivement :

$$H_v = 0.00276 \text{ m}, \quad h_v = 29.5 \text{ m}, \quad v^2/(2g) = 0.488 \text{ m}$$

On voit donc clairement que le terme h_v est dominant dans l'équation de la question 2, et que cette dernière devient juste :

$$h = h_v$$

L'énergie cinétique résiduelle en sortie de canalisation, ainsi que la perte d'énergie dans la conduite principale, sont donc bien plus faibles que la perte d'énergie dans la branche domestique. L'énergie potentielle de pesanteur est donc essentiellement utilisée pour compenser la perte d'énergie dans la branche domestique.

5. $v \simeq \sqrt{\frac{2gh}{e_0}}$

$$v \simeq \frac{v_{\text{torr}}}{\sqrt{e_0}} \quad \text{et donc} \quad Q = v s \simeq \frac{Q_{\text{torr}}}{\sqrt{e_0}}$$

ce qui signifie que le débit en présence d'une perte de charge totale e_0 est égal à celui sans perte de charge $/\sqrt{e_0}$. Numériquement, ici ça fait un facteur $\simeq 7.8$! On voit donc à quel point la formule de Toricelli, et donc la formule de Bernoulli classique, c'est-à-dire l'hypothèse fluide parfait, peut donner des résultats fantaisistes si on ne fait pas attention!

6. $Q = 14.7$ L/min, soit une erreur inférieure au %. C'est donc excellent.

7. $Q = 4q$

8. Entre E et A :

$$H_A - H_E = -H_v$$

Entre A et S, où S est l'une des sorties :

$$H_S - H_A = -h_v$$

où h_v est la perte de charge estimée sur un tuyau, avec un débit q et non plus Q . L'erreur classique consiste à compter 4 fois la perte de charge h_v .

On retrouve donc rigoureusement la même équation qu'à la question 2, soit finalement :

$$h = h_v + H_v + \frac{v^2}{2g}$$

9. Approximations précédentes : Sans plus de calculs, on va donc obtenir la même équation qu'à la question 5 et le débit q **dans une branche** vaut au final :

$$q = vs = s\sqrt{\frac{2gh}{e_0}}$$

C'est donc le même résultat que précédemment, ce qui veut dire qu'on retrouve le même débit dans chacune des 4 branches que lorsqu'un seul robinet est ouvert. En d'autres termes peu importe le nombre de robinets ouverts, on a toujours le même débit, qui est entièrement fixé par la perte de charge dans la partie domestique. Cela correspond bien à l'expérience : si le voisin utilise de l'eau, ça n'a pas d'influence sur le débit chez vous (sauf cas pathologique, fin de ligne, installation mal dimensionnée). Le débit chez vous ne dépend donc que de votre installation. Les douches collectives fonctionnent aussi sur ce principe.

10. Idem question 3 : $p_B \simeq p_{\text{atm}} + \rho gh$

Conclusion : la pression à l'entrée de votre maison est toujours environ égale à la pression hydrostatique. Ça veut dire que cette pression est constante, que vous ou vos voisins consommiez de l'eau ou non !

Note : apparemment il n' a pas de disposition légale fixant une fourchette de pressions à l'entrée, mais on considère que les valeurs de confort sont entre 2 et 5 bar. Trop, ça risque de péter des canalisations, on peut mettre un réducteur de pression, pas assez, c'est pénible, on peut mettre un surpresseur c.a.d une pompe qui va apporter du \dot{W}_u .

11. $h_u + h = h_v + H_v + \frac{v^2}{2g}$

Tout se passe comme si on avait augmenté la hauteur de la citerne de h_u .

Mêmes expressions pour les pertes de charge.

12. $h_u + h \simeq h_v \simeq \frac{v^2}{2g} e_0$

$$\frac{q}{Q_m} = \sqrt{\frac{1 + h/h_M}{\Pi + n^2}}$$

13. Même raisonnement qu'à la question 10

$$p_B \simeq p_{\text{atm}} + \rho g(h + h_u) \quad (3)$$

vrai quel que soit le nombre de branches ouvertes. On retrouve que tout se passe comme si le château d'eau était monté de h_u .

$$\dot{W}_u = \rho gh_u Q$$

14. Application numérique : $Q = 189 \text{ L/min}$, $q = 18.9 \text{ L/min}$, $p_B = 4.77 \text{ bar}$,
 $h_u = 19.3 \text{ m}$, $\dot{W}_u = 595 \text{ W}$.

Refroidissement centrale nucléaire.

1. Démonstration simple si écrit avec rigueur.

F est \simeq constante par rapport à Q en régime turbulent à Re très élevé (à droite du diagramme de Moody).

2. $Q_R + Q_E = Q_D$, donc $\frac{Q_D}{Q_R} = 1 + x$

$$\frac{Q_E}{Q_D} = \frac{x}{1+x}$$

3. $x = \frac{\text{débit prélevé rivière}}{\text{débit échangeur}}$ puis cf. énoncé

4. Ecrire Bernoulli sur AB, puis sur BC

$$h_{u_D} = F_D \frac{Q_D^2}{2gS_D^2} + F_R \frac{Q_R^2}{2gS_R^2} + h + \frac{Q_R^2}{2gS_C^2}$$

5. Multiplier l'équation précédente par $2gS_R^2/F_RQ_R^2$. On obtient le résultat demandé

$$h_u^* = \epsilon_1(x+1)^2 + 1 + h^* + \epsilon_2$$

avec

$$\epsilon_1 = \frac{F_D}{F_R} \left(\frac{S_R}{S_D} \right)^2 \quad \epsilon_2 = \frac{1}{F_R} \left(\frac{S_R}{S_C} \right)^2$$

6. – S_R section moyenne échangeur très faible devant S_C , $S_R \ll S_C$.
 – Un donne $e_v = 0.8$, un échangeur en comporte plein, donc $F_R \gg 1$.
 Donc $\epsilon_2 \ll 1$ peut être négligé.
7. Extraire x de l'équation démontrée au 5.

$$x = \frac{Q_E}{Q_R} = \sqrt{\frac{h_u^* - h^* - 1}{\epsilon_1}} - 1 \quad \text{d'où} \quad \frac{Q_D}{Q_R} = \sqrt{\frac{h_u^* - h^* - 1}{\epsilon_1}}$$

8. $h_u^* = 1 + h^*$

9. par $F_R Q_R^2 / 2gS_R^2 =$ hauteur de perte de charge h_{v_R} dans le circuit retour.

$$\epsilon_1 = Q_E/Q_R = 0.1 \quad x = 2/40 = 0.05$$

Hauteur perte de charge branche retour $h_{v_R} = \Delta p / \rho g$

$$h_{v_R} = 20.7 \text{ m} \quad \text{donc} \quad h^* = \frac{h}{h_{v_R}} = 0.242 \quad h_u^* = 1.35$$

$$Q_D = 42 \text{ m}^3/\text{s} \quad h_u = 27.9 \text{ m} \quad \mathcal{P}_D = 11.5 \text{ MW}$$

ce qui laisse entendre qu'une partie de l'énergie produite sert à faire circuler de l'eau dans le circuit tertiaire. Ca semble énorme mais à l'échelle d'une centrale nucléaire c'est ridicule. Une tranche de centrale représente environ 1 GW, cela fait donc du 0.6 % ...

10. Pour f , utiliser Haaland

v	2.55 m/s
Re	2.55×10^6
f	0.0198
h_v	3.27 m
\mathcal{P}_E	0.260 MW

5 Navier-Stokes

Ecoulement de Couette

1. A justifier :

$$\mathbf{v} = \begin{cases} u(z) \\ 0 \\ 0 \end{cases}$$

CFs :

$$u(z=0) = 0 \quad u(z=h) = U_0$$

2.

3.

4. L'équation suivant x se simplifie en :

$$0 = \eta \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

d'où

$$u(y) = U_0 \frac{z}{h}$$

5. Tenseur des contraintes :

$$\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} = -p \overline{\overline{\mathbf{I}}} + \underbrace{\eta \left({}^T \overline{\overline{\mathbf{grad}}} \mathbf{v} + \overline{\overline{\mathbf{grad}}} \mathbf{v} \right)}_{\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}_v}} = \begin{bmatrix} -p & 0 & \eta \frac{U_0}{h} \\ 0 & -p & 0 \\ \eta \frac{U_0}{h} & 0 & -p \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_{\text{Plaque/Fluide}} = \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \mathbf{n} = L \times l \begin{bmatrix} -p & 0 & \eta \frac{U_0}{h} \\ 0 & -p & 0 \\ \eta \frac{U_0}{h} & 0 & -p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta \frac{U_0}{h} \\ 0 \\ -p(h) \end{bmatrix}$$

La force tangentielle exercée par la plaque mouvante sur le fluide est donc :

$$\mathbf{F}_h = Ll \eta \frac{U_0}{h} \mathbf{e}_x.$$

Sur la plaque du fond :

$$\mathbf{F}_0 = L \times l \begin{bmatrix} -p & 0 & \eta \frac{U_0}{h} \\ 0 & -p & 0 \\ \eta \frac{U_0}{h} & 0 & -p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\eta \frac{U_0}{h} \\ 0 \\ p(0) \end{bmatrix}$$

Et on retrouve la même chose avec le signe “-”. Les forces tangentielle exercée par les plaques haute et basse sont donc opposées, ou dit d’une autre façon, le fluide transmet à la plaque du bas la force (ou la quantité de mouvement) que la plaque du haut lui applique.

Écoulement de Couette-Poiseuille cylindrique

- 1.
2. Mêmes équations que pour Poiseuille mais changement sur les conditions frontière

$$\begin{aligned}v_z(r = R_i) &= -W_0 \\v_z(r = R_e) &= 0\end{aligned}$$

3. Le reste n’est que calcul un peu pénible... Je donne quelques détails pour vous permettre de vérifier vos résultats intermédiaires. La troisième équation montre encore que le profil de pression suivant z est linéaire donc on pose à nouveau $\partial p/\partial z = -\Delta p/L$ et on intègre deux fois :

$$v_z(r) = -\frac{\Delta p}{4\eta L} r^2 + A \ln r + B$$

mais A est maintenant non-nulle car il n’y a pas de fluide sur l’axe. Les CFs fournissent après calcul :

$$\begin{aligned}A &= \frac{W_0 + \frac{\Delta p}{4\eta L} (R_e^2 - R_i^2)}{\ln(R_e/R_i)} \\B &= -\left[W_0 + \frac{\Delta p}{4\eta L} (R_e^2 - R_i^2) \right] \frac{\ln R_e}{\ln(R_e/R_i)} + \frac{\Delta p}{4\eta L} R_e^2\end{aligned}$$

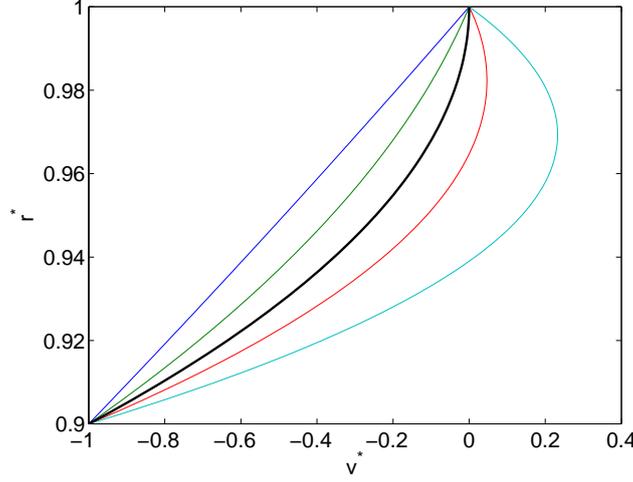
$$v_z(r^*) = \underbrace{-W_0 \frac{\ln(r/R_e)}{\ln(R_i/R_e)}}_{\text{Couette}} + \underbrace{\frac{\Delta p}{4\eta L} \left[(R_e^2 - r^2) - (R_e^2 - R_i^2) \frac{\ln(r/R_e)}{\ln(R_i/R_e)} \right]}_{\text{Poiseuille}}$$

En adimensionnel (conseillé) :

$$\frac{v_z(r)}{W_0} = \underbrace{-\frac{\ln r^*}{\ln \alpha}}_{\text{Couette}} + \underbrace{\frac{\Pi}{4} \left[1 - r^{*2} - (1 - \alpha^2) \frac{\ln r^*}{\ln \alpha} \right]}_{\text{Poiseuille}}$$

le paramètre $\Pi = \frac{\Delta p R_e^2}{\eta L W_0}$ représentant le rapport Poiseuille/Couette.

Quelques profils tracés pour $\Pi = 0.1, 100, 300, 500$ (de gauche à droite). Celui en noir obtenu pour la valeur critique calculée à la question suivante. C’est la limite entre un mouvement unidirectionnel vers la gauche, et bidirectionnel



4. Limite obtenue quand $\frac{dv_z^*}{dr^*}(r^* = 1) = 0$.

$$\Pi > \frac{2}{-\ln \alpha - (1 - \alpha^2)/2}$$

5.

$$Q = \iint_S v_z(r) dS = W_0 2\pi R_e^2 \int_\alpha^1 v_z^*(r^*) r^* dr^*$$

Après calcul

$$\frac{Q}{2\pi R_e^2 W_0} = \Pi I_p(\alpha) - I_c(\alpha)$$

avec

$$I_p(\alpha) = \frac{1}{16} \left[1 - \alpha^4 + \frac{(1 - \alpha^2)^2}{\ln \alpha} \right] \quad I_c(\alpha) = \frac{\alpha^2 - 1}{4 \ln \alpha} - \frac{\alpha^2}{2}$$

résultat utile pour l'exercice sur l'amortisseur hydraulique.

6. Force de pression sur cylindre intérieur :

$$\mathbf{F}_{\mathbf{p}/\text{cylindre}} = \Delta p \pi R_i^2 \mathbf{e}_z$$

Force visqueuse exercée sur le cylindre :

$$\mathbf{F}_{\mathbf{v}/\text{cylindre}} = 2\pi R_i L \eta \frac{\partial v_z}{\partial r}(r = R_i) \mathbf{e}_z$$

Sous forme adimensionnelle :

$$\frac{\mathbf{F}_{\mathbf{v}/\text{cylindre}}}{\pi \eta L W_0} = 2\alpha \left[\frac{\Pi}{4} \left(-2\alpha - \frac{1 - \alpha^2}{\alpha \ln \alpha} \right) - \frac{1}{\alpha \ln \alpha} \right] \mathbf{e}_z \quad \text{et} \quad \frac{\mathbf{F}_{\mathbf{p}/\text{cylindre}}}{\pi \eta L W_0} = \Pi \alpha^2 \mathbf{e}_z$$

En sommant :

$$\frac{\mathbf{F}_{\text{tot}/\text{cylindre}}}{\pi \eta L W_0} = \frac{\Pi(\alpha^2 - 1) - 4}{2 \ln \alpha} \mathbf{e}_z \quad (4)$$

Force est toujours orientée suivant z , donc toujours opposée au mouvement du cylindre intérieur. C'est le principe utilisé dans l'amortisseur hydraulique (cf. exo correspondant)