Recherche d'un tracé optimal d'autoroute

Mondane Cerou, Sébastien Mannheim,
Thomas van Oudenhove

Avril 2002

1 Préambule

On commence par se placer dans le repère de Frenet. On a donc le système d'équations suivant (équations d'évolution) :

$$\begin{cases} \dot{x} = v\cos\theta \\ \dot{y} = v\sin\theta \\ \dot{\theta} = uv \end{cases}$$

On a bien $\dot{X} = F(X, u, t)$ car

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \theta \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \dot{X} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$$

Le but est de minimiser à la fois la commande et le temps de parcours, il faut donc résoudre :

$$\mathrm{Min} \int_0^{t_f} (u^2 + kM^2)\,\mathrm{d}t \qquad \text{avec} \quad k \geqslant 0$$

- M étant la limite de la commande ($-M \leqslant u \leqslant M$),
- $k = \frac{k_t}{k_u}$, permettant de favoriser le temps de parcours ou le confort de commande,
- on choisit l'indice f pour $t = t_f$ et l'indice 0 pour $t = 0$

Pour résumer, on a le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{x} = v\cos\theta \\ \dot{y} = v\sin\theta \\ \dot{\theta} = uv \\ z^2 + u^2 - M^2 = 0 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} \theta_0 = \frac{\pi}{2} \\ x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \\ \dot{\theta}_0 = 0 \end{array}\right.$$

2 Formulation de Lagrange

On introduit le Lagrangien instantané :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(X, \dot{X}, u, p, t) &= u^2 + kM^2 + [p_1\, p_2\, p_3] \times \begin{bmatrix} \dot{x} - v\cos\theta \\ \dot{y} - v\sin\theta \\ \dot{\theta} - uv \end{bmatrix} + \mu(z^2 + u^2 - M^2) \\ &= u^2 + kM^2 + p_1(\dot{x} - v\cos\theta) + p_2(\dot{y} - v\sin\theta) + p_3(\dot{\theta} - uv) \\ &\qquad + \mu(z^2 + u^2 - M^2) \end{aligned}$$

En utilisant les conditions nécessaires d'optimalité, on obtient les systèmes suivants :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(\mathcal{L}_{\dot{X}}) = \mathcal{L}_X \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(\mathcal{L}_{\dot{x}}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(p_1) & \mathcal{L}_x = 0 \quad p_1 \to \text{constante} \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(\mathcal{L}_{\dot{y}}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(p_2) & \mathcal{L}_y = 0 \quad p_2 \to \text{constante} \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(\mathcal{L}_{\dot{\theta}}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(p_3) & \mathcal{L}_\theta = v\dot{\theta}(p_1\sin\theta - p_2\cos\theta) + p_3\ddot{\theta} \\ \to \dot{p_3} = v(p_1\sin\theta - p_2\cos\theta) & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\mathcal{L}_{\dot{z}} = 0 = 2\,\mu\,z \end{array}\right.$$

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(\mathcal{L}_{\dot{u}}) = \mathcal{L}_u \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(\mathcal{L}_{\dot{u}}) = 0 = \mathcal{L}_u = 2u - p_3 v + 2\mu u \\ 2u(1+\mu) = p_3 v \end{array}\right.$$

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(\mathcal{L}_{\dot{p}}) = \mathcal{L}_p \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(\mathcal{L}_{\dot{p_1}}) = 0 & \mathcal{L}_{p_1} = \dot{x} - v\cos\theta \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(\mathcal{L}_{\dot{p_2}}) = 0 & \mathcal{L}_{p_2} = \dot{y} - v\sin\theta \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(\mathcal{L}_{\dot{p_3}}) = 0 & \mathcal{L}_{p_3} = \dot{\theta} - uv \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(\mathcal{L}_{\dot{\mu}}) = 0 & \mathcal{L}_\mu = z^2 + u^2 - M^2 \end{array}\right.$$

Pour simplifier ce système, on pose : $\begin{cases} p_1 = \alpha \cos \beta \\ p_2 = \alpha \sin \beta \end{cases}$

On en arrive alors au système suivant :

$$\begin{cases} \dot{p_1} = 0 \\ \dot{p_2} = 0 \\ \dot{p_3} = v(p_1 \sin \theta - p_2 \cos \theta) = v\alpha \sin(\theta - \beta) \\ \mu z = 0 \\ vp_3 = 2u(1+\mu) \\ p_1 = \alpha \cos \beta \\ p_2 = \alpha \sin \beta \end{cases}$$

On pose l'hypothèse suivante : $p_i \geqslant 0$ et $\mu \geqslant 0$ et toutes les autres fonctions sont au minimum continues par morceaux sur l'intervalle d'étude. De l'équation $\mu z = 0$, on peut voir qu'il se dégage deux cas principaux dont un encore décomposable en deux cas :

$$\begin{cases} z = 0 \quad \rightsquigarrow u = -M \\ \\ \mu = 0 \quad \rightsquigarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha \neq 0 \end{cases} \end{cases}$$

3 Étude des cas

3.1 $z = 0$

$$\boxed{z = 0 \rightsquigarrow u = -M} \tag{1}$$

3.2 $\mu = 0$

3.2.1 $\alpha = 0$

Dans le cas où α est égal à zéro, p_3 se simplifie et devient une constante car sa dérivée est nulle.

$$\boxed{\begin{cases} \mu = 0 \\ \\ \alpha = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \quad u = \frac{vp_3}{2} \quad \text{(constante)}} \tag{2}$$

3.2.2 $\alpha \neq 0$

Dans ce cas, on a : $p_3 = \frac{2u}{v}$, donc $\dot{p_3} = \frac{2\dot{u}}{v}$. Or $\dot{p_3} = v\alpha \sin(\theta - \beta)$ et $u = \frac{\dot{\theta}}{v}$; on obtient donc l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{\theta} = \frac{v^3\alpha}{2} \sin(\theta - \beta) \tag{3}$$

que l'on peut simplifier de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
\ddot{\theta} &= \tfrac{v^3\alpha}{2} \sin(\theta - \beta) \\
&= \tfrac{v^3\alpha}{2} (\sin\theta\cos\beta - \cos\theta\sin\beta) \\
&= \tfrac{v^2\alpha}{2} (\cos\beta\dot{y} - \sin\beta\dot{x}) \\
\text{Donc} \\
\dot{\theta} &= \tfrac{v^2\alpha}{2} (\cos\beta y - \sin\beta x) + K
\end{aligned}$$

K étant la constante d'intégration

4 Tracé des courbes

4.1 Simple courbure variable

La condition de transversalité stipule :

$$(\mathcal{L} - \mathcal{L}_{\dot{X}}^T \dot{X})\Delta t + \mathcal{L}_X^T \Delta X = 0$$

Ce qui nous donne :

$$(u^2 + kM^2 - p_1 v \cos\theta - p_2 v \sin\theta - p_3 uv)\Delta t + p_3 \Delta\theta = 0$$

Ceci $\forall \Delta t$, $\forall \Delta\theta$ en $t = t_f$, ainsi :

$$\begin{cases} p_3(t_f) = 0 \\ u^2 + kM^2 - p_1 v \cos\theta - p_2 v \sin\theta - p_3 uv = 0 \end{cases}$$

Il est quasiment impossible d'arriver au point demandé en n'utilisant qu'une trajectoire à courbure variable. La zone d'arrivée possible de ce type de courbe est trop difficile à déterminer. Ce qui nous amène à utiliser un autre type de trajectoire : *courbure variable — arc de cercle — courbure variable.*

4.2 Mélange de trajectoires

Soit t_1 et t_2 les temps de changement de type de courbe. L'indice 1 est rattaché à la première trajectoire à courbure variable et l'indice 2 à la dernière partie de la courbe. On définit au départ les valeurs α_1, β_1, t_1. Cela nous permet de calculer x_1 et y_1. De plus, nous savons que $\dot{\theta} = C$ car nous entrons à t_1 sur l'arc de cercle.

$$\dot{\theta} = C \tag{4}$$

En intégrant :

$\theta = C(t) + cste$

On trouve la constante en utilisant la première courbe :

$\theta = \theta_1 + C(t - t_1)$

De plus, nous avons toujours :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x} & = & v \cos\theta \\ \dot{y} & = & v \sin\theta \end{array} \right. \tag{5}$$

On obtient donc (4 & 5) :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = \frac{v}{C} \sin\theta$$

En intégrant :

$$x = \frac{v}{C} \sin\theta + cste$$

On détermine la constante grâce à x_1

$$x_1 = \frac{v}{C} \sin\theta_1 + cste$$

En faisant de même pour y, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} x & = & x_1 + \frac{v}{C}(\sin\theta - \sin\theta_1) \\ y & = & y_1 + \frac{v}{C}(\cos\theta - \cos\theta_1) \end{cases}$$

Pour reprendre une trajectoire à courbure variable, on reprend l'équation différentielle sous une forme différente (en $\dot{\theta}^2$) :

$$\dot{\theta}^2 = -\alpha_2 v^3 \cos(\theta - \beta_2) + cste$$

Or au point 2, on a :

$$0 = -\alpha_2 v^3 \cos(\theta_2 - \beta_2) + cste$$

Donc :

$$\dot{\theta}^2 = -\alpha_2 v^3 (\cos(\theta - \beta_2) - \cos(\theta_2 - \beta_2))$$

Or $\dot{\theta}_f = 0$

$$0 = -\alpha_2 v^3 (\cos(\theta_f - \beta_2) - \cos(\theta_2 - \beta_2))$$

On obtient donc :

$$\cos(\theta_f - \beta_2) = \cos(\theta_2 - \beta_2)$$

Le programme ne permet toujours pas d'atteindre n'importe quel point du plan. Cependant, on fait tourner le programme et on choisit ensuite un point par lequel passe la courbe.

5 Sources des programmes

5.1 Simple courbure variable

```
clear all;

global v alphaa beta
global tetaf

%%% declaration des variables
k=0.01;
```

```
M=-.015;
v = 20;
tetao = pi/2;
xo = 0;
yo = 0;
xf=400;
yf=400;
to = 0;
tf = 200;
a = 4;
b = 2;

%%% definition des vecteurs et calculs des alphaa et beta

tspan = [to:200:tf];
condini = [xo, yo, tetao];

beta = atan(yf/xf)-pi
beta=-0.3
alphaa = k*M*M/(v*sin(beta))

%%% programme

[t, Xd] = ode45('derivee', tspan, condini)

xd1 = Xd(:,1);
xd2 = Xd(:,2);
xd3 = Xd(:,3);

plot(xd1, xd2)
```

5.2 Trajectoire *courbure variable — cercle — courbure variable*

```
clear all;

global v alphaa1 beta1 C alphaa2 beta2

%%% declaration des variables

k=0.01;
M=-.015;
v = 20;
tetao = pi/2;
xo = 0;
yo = 0;
xf=500;
yf=600;
to = 0;
t1 = 100;
t2 = 150;
t3= 300;
a = 4;
b = 2;

%%% definition des vecteurs

tspan = [to:t1:t1];
condini = [xo, yo, tetao];

beta1 = 0.3
alphaa1 = -.0000001

%%% premiere protion de courbe

[t, Xd] = ode45('derivee1', tspan, condini)

xd1 = Xd(:,1);
xd2 = Xd(:,2);
xd3 = Xd(:,3);
```

```
%%% deuxieme portion de courbe

x1=xd1(size(xd1,1),1)         %conditions initiales
y1=xd2(size(xd2,1),1)         %de la deuxieme portion
teta1=xd3(size(xd2,1),1)
C=(alphaa1*v*v/2)*(y1*cos(beta1)-x1*sin(beta1))

tspan1= [t1:t2-t1:t2] ;
condini1 = [x1, y1, teta1];
[t, Xd1] = ode45('derivee2', tspan1, condini1)

xd11 = Xd1(:,1);
xd21 = Xd1(:,2);
xd31 = Xd1(:,3);

%%% derniere portion de courbe

x2=xd11(size(xd11,1),1)       %conditions initiales
y2=xd21(size(xd21,1),1)       %de la derniere portion
teta2=xd31(size(xd21,1),1)
beta2 = atan(yf/xf)
alphaa2 = k*M*M/(v*sin(beta2))

tspan2= [t2:t3-t2:t3] ;
condini2 = [x2, y2, teta2];
[t, Xd1] = ode45('derivee3', tspan2, condini2)

xd12 = Xd1(:,1);
xd22 = Xd1(:,2);
xd32 = Xd1(:,3);

%%% affichage

plot(xd1, xd2,'r',xd11, xd21,'k',xd12,xd22,'b');
set(gca,'Ylim',[-10 2000]);
set(gca,'Xlim',[-10 2000]);
set(gca,'DataAspectRatio',[1 1 1]);
```

5.3 Sous-programmes pour la résolution numérique (ode45)

5.3.1 Courbure variable

```
function Xpoint = derivee(t, X)

global v alphaa beta
t;
teta=X(3);
Xpoint(1) = v*cos(teta);
Xpoint(2) = v*sin(teta);
Xpoint(3) = alphaa*v*v*(cos(beta)*X(2)-sin(beta)*X(1))/2;

Xpoint = Xpoint';
```

5.3.2 1^{ere} portion

```
function Xpoint = derivee1(t, X)

global v alphaa1 beta1
t;
teta=X(3);
Xpoint(1) = v*cos(teta);
Xpoint(2) = v*sin(teta);
Xpoint(3) = alphaa1*v*v*(cos(beta1)*X(2)-sin(beta1)*X(1))/2;

Xpoint = Xpoint';
```

5.3.3 2^{eme} portion

```
function Xpoint = derivee2(t, X)

global v C
t;
teta=X(3);
Xpoint(1) = v*cos(teta);
Xpoint(2) = v*sin(teta);
Xpoint(3) = C;

Xpoint = Xpoint';
```

5.3.4 3^{eme} portion

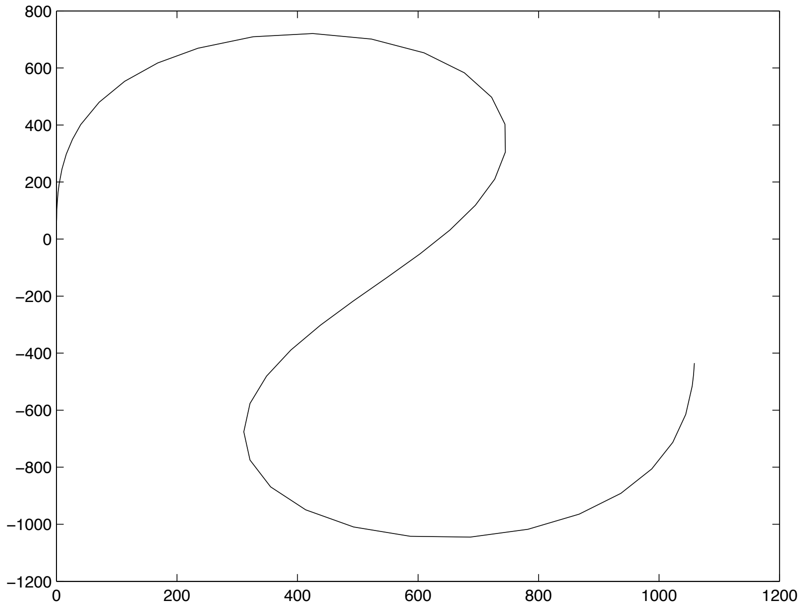
```
function Xpoint = derivee3(t, X)

global v alphaa2 beta2
t;
teta=X(3);
Xpoint(1) = v*cos(teta);
Xpoint(2) = v*sin(teta);
Xpoint(3) = alphaa2*v*v*(cos(beta2)*X(2)-sin(beta2)*X(1))/2;

Xpoint = Xpoint';
```

6 Courbes obtenues

6.1 Courbure variable



6.2 Mélange des trajectoires